ЕГЭ 2018

Ю. В. Садовничий

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

100 БАЛЛОВ

- Все типы задач в целых числах
- Уравнения и неравенства в целых числах
- Систематизация по типам
- Основные методы решения
- Разбор решений примеров
- Ответы к задачам для самостоятельного решения

УЧПЕДГИЗ

Ю. В. Садовничий

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

МАТЕМАТИКА
ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Систематизация по типам
Основные методы решения
Разбор решений примеров
Ответы к задачам
для самостоятельного решения

УЧПЕДГИЗ

МОСКВА
2018

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
С14

Садовничий Ю. В.

С14 ЕГЭ 2018. Математика. Решение уравнений и неравенств / Ю. В. Садовничий. — М. : УЧПЕДГИЗ, 2018. — 95, [1] с. (Серия «ЕГЭ. 100 баллов»)

ISBN 978-5-906976-39-0

Данное пособие полностью соответствует федеральному государственному образовательному стандарту (второго поколения).

Данная книга посвящена задачам, аналогичным задаче 15 ЕГЭ по математике (решение уравнений и неравенств). Рассматриваются различные методы решения таких задач, в том числе и оригинальные. Книга будет полезна учащимся старших классов, учителям математики, репетиторам.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

Подписано в печать 23.08.2017. Формат 60x90/16.
Гарнитура «Таймс». Бумага газетная. Уч.-изд. л. 2,95.
Усл. печ. л. 6. Тираж 5000 экз. Заказ № 3576/17.

ISBN 978-5-906976-39-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данная книга посвящена задачам, аналогичным задаче 15 профильного ЕГЭ по математике (уравнения и неравенства). Книга разбита на главы по темам, материал в каждой главе подается «от простого к сложному».

Не секрет, что задачи 16–19 (планиметрия, текстовая задача, задача с параметром, задача на целые числа) являются трудными для подавляющего большинства выпускников средней школы. То же можно сказать и про задачу 14 (стереометрия). Поэтому решенная задача 15 (наряду с задачей 13) является возможностью повысить свой балл на ЕГЭ до хорошего уровня.

Первые три главы являются подготовительными, в них рассматривается решение неравенств методом интервалов, уравнения и неравенства, содержащие модуль, иррациональные уравнения и неравенства.

Четвертая глава является основной в данной книге, так как задачи в ней наиболее приближены к реальной задаче 15 профильного ЕГЭ по математике. Эта глава разбита на несколько параграфов, в каждом из которых исследуется какой-либо метод решения такой задачи.

В пятой главе разобраны уравнения и неравенства смешанного типа, то есть содержащие, например, логарифм и модуль, или показательную функцию и знак радикала. Примеры из этой главы позволяют понять «структуру» решения такой задачи, то есть определиться с первоначальным и последующими действиями.

Шестая глава посвящена логарифмическому методу интервалов. Этот метод может быть использован тогда, когда остальные методы решения неравенства становятся неэффективными ввиду большого числа получающихся вариантов.

И, наконец, в седьмой главе рассмотрены методы решения систем алгебраических уравнений и неравенств, в том числе предлагавшихся на ЕГЭ по математике в прошлых годах.

Каждая глава книги содержит теоретический материал, несколько разобранных примеров, в которых демонстрируются различные методы решения задач по данной теме, а также задачи для самостоятельного решения, снабженные ответами.

Автор надеется, что данная книга будет полезна учащимся старших классов для самостоятельной подготовки к ЕГЭ, а также учителям математики, репетиторам, и всем тем, кто интересуется данной темой.

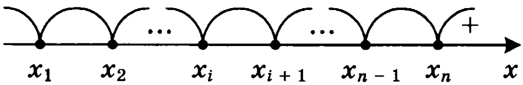
Желаем успехов!

ГЛАВА 1. МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ

Пусть дано неравенство

$$\frac{(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots(x-x_i)^{k_i}}{(x-x_{i+1})^{k_{i+1}}\dots(x-x_{n-1})^{k_{n-1}}(x-x_n)^{k_n}} > 0\ (< 0,\ \geq 0,\ \leq 0),$$

и пусть для определенности $x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{n-1} < x_n$. Точки $x = x_1$, ... , $x = x_n$ разбивают числовую прямую на промежутки.



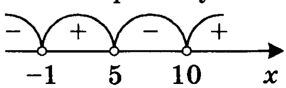
На промежутке $(x_n, +\infty)$ ставим знак «плюс». Далее, правило чередования знаков следующее. Если число k_i нечетное, то знак при переходе через точку $x = x_i$ меняется на противоположный, а если четное, то знак остается прежним. Кроме того, если неравенство нестрогое, то в ответ включаются корни числителя и исключаются корни знаменателя, а если строгое, то исключаются как корни числителя, так и корни знаменателя.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{(x+1)(x-10)}{x-5} < 0.$$

Решение. Нанесем точки на числовую прямую и определим знаки на полученных промежутках



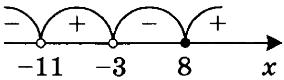
Согласно правилу, на промежутке $(10, +\infty)$ мы ставим знак «плюс», а далее знаки меняются во всех точках. Кроме того, корни числителя не включаются в ответ, так как неравенство строгое. В ответ записываем промежутки, на которых стоит знак «минус».

Ответ: $x \in (-\infty, -1) \cup (5, 10)$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{x-8}{(x+3)(x+11)} \geq 0.$$

Решение. Нанесем точки на числовую прямую и определим знаки на полученных промежутках.



Согласно правилу, на промежутке $(8, +\infty)$ мы ставим знак «плюс», а далее знаки меняются во всех точках. Кроме того, корень числителя $x = 8$ включается в ответ, так как неравенство нестрогое. В ответ записываем промежутки, на которых стоит знак «плюс».

Ответ: $x \in (-11, -3) \cup [8, +\infty)$.

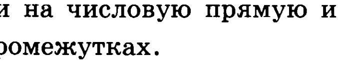
Пример 3. Решить неравенство

$$\frac{(4-x)(x+7)}{x(x-1)} \leq 0.$$

Решение. Умножим обе части неравенства на (-1), т.е. выражение $(4 - x)$ изменим на $(x - 4)$, поменяв при этом знак неравенства на противоположный. Имеем:

$$\frac{(x-4)(x+7)}{x(x-1)} \geq 0.$$

Нанесем точки на числовую прямую и определим знаки на полученных промежутках.



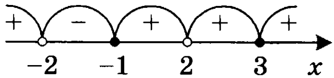
Согласно правилу, на промежутке $(4, +\infty)$ мы ставим знак «плюс», а далее знаки меняются во всех точках. Кроме того, корни числителя $x = 4$ и $x = -7$ включаются в ответ, так как неравенство нестрогое. В ответ записываем промежутки, на которых стоит знак «плюс».

Ответ: $x \in (-\infty, -7] \cup (0,1) \cup [4, +\infty)$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\frac{(x-3)^4(x+1)^3}{(x-2)^2(x+2)} \le 0.$$

Решение. Нанесем точки на числовую прямую и определим знаки на полученных промежутках.



Согласно правилу, на промежутке $(3, +\infty)$ ставим знак «плюс». Далее, знак не меняется в точках $x = 3$ и $x = 2$ и меняется в точках $x = -1$ и $x = -2$. Кроме того, так как неравенство нестрогое, корни числителя $x = -1$ и $x = 3$ мы включаем в ответ, а корни знаменателя $x = -2$ и $x = 2$ из ответа исключаем. Корень числителя $x = 3$ входит в ответ как изолированная точка.

Ответ: $x \in (-2, -1] \cup \{3\}$.

Пример 5. Решить неравенство

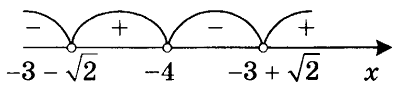
$$x+2 < \frac{1}{x+4}.$$

Решение. Преобразуем данное неравенство к виду, удобному для его решения методом интервалов:

$$x+2 < \frac{1}{x+4} \Leftrightarrow x+2-\frac{1}{x+4} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x+4)-1}{x+4} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+6x+7}{x+4} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x+3+\sqrt{2})(x+3-\sqrt{2})}{x+4} < 0.$$

Нанесем точки на числовую прямую и определим знаки на полученных промежутках (рисунок 6).



Согласно правилу, на промежутке $(-3+\sqrt{2}, +\infty)$ ставим знак «плюс», далее знаки меняются во всех точках. В ответ запишем промежутки, на которых стоит знак «минус», при этом корни числителя в ответ не включаем, так как неравенство строгое.

Ответ: $x \in (-\infty, -3-\sqrt{2}) \cup (-4, -3+\sqrt{2})$.

Пример 6. Решить неравенство

$$\frac{4}{1-x} > x+2.$$

Решение. Преобразуем данное неравенство к виду, удобному для его решения методом интервалов:

$$\frac{4}{1-x} > x+2 \Leftrightarrow \frac{4}{x-1} + x + 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{4+(x-1)(x+2)}{x-1} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4+(x^2+x-2)}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x+2}{x-1} < 0.$$

Так как дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + x + 2$ отрицательный, то выражение, стоящее в числителе полученной дроби, положительно при любом значении переменной x. Поэтому, чтобы дробь была отрицательна необходимо и достаточно, чтобы знаменатель дроби был отрицателен. Имеем: $x - 1 < 0$, то есть $x < 1$.

Ответ: $x \in (-\infty, 1)$.

Пример 7. Решить неравенство

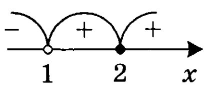
$$x \le 3 - \frac{1}{x-1}.$$

Решение. Преобразуем данное неравенство к виду, удобному для его решения методом интервалов:

$$x \le 3 - \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} + x - 3 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1+(x-1)(x-3)}{x-1} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4x+4}{x-1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{x-1} \le 0.$$

Нанесем точки на числовую прямую и определим знаки на полученных промежутках.



Согласно правилу, на промежутке $(2, +\infty)$ ставим знак «плюс», далее, знак не меняется в точке $x = 2$ и меняется в точке $x = 1$. Кроме того, корень числителя $x = 2$ является решением неравенства, так как неравенство несторогое.

В ответ запишем промежуток $(-\infty,\ 1)$ на котором стоит знак «минус» и точку $x = 2$.

Ответ: $x \in (-\infty,\ 1) \cup \{2\}$.

Пример 8. Решить неравенство

$$(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) \geq 5.$$

Решение. Пусть $x^2 + 3x - 1 = y$. Тогда данное неравенство примет следующий вид:

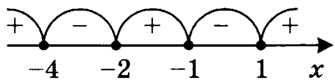
$$(y + 2)(y - 2) \geq 5 \Leftrightarrow y^2 - 4 \geq 5 \Leftrightarrow y^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y - 3)(y + 3) \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3x - 1 - 3)(x^2 + 3x - 1 + 3) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 3x - 4)(x^2 + 3x + 2) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 4)(x + 1)(x + 2) \geq 0$$

Нанесем точки на числовую прямую и определим знаки на полученных промежутках.



Согласно правилу, на промежутке $(1,\ +\infty)$ ставим знак «плюс», далее знаки меняются во всех точках. Кроме того, все концы промежутков входят в ответ, так как неравенство нестрогое. В ответ записываем промежутки, на которых стоит знак «плюс».

Ответ: $x \in (-\infty,\ -4] \cup [-2,\ -1] \cup [1,\ +\infty)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Решить неравенство $(x - 1)(x + 2)(x - 6) < 0$.
2. Решить неравенство $(x + 1)(3 - x)(x - 4)(x + 7) \leq 0$.
3. Решить неравенство $\dfrac{(x-1)}{x(x+6)} < 0$.
4. Решить неравенство $\dfrac{(x+8)(x+3)}{4-x} < 0$.
5. Решить неравенство $\dfrac{(x+1)(x-4)}{(x-2)(x+2)} \geq 0$.

6. Решить неравенство $\dfrac{(x+3)(x-8)}{x(5-x)} \ge 0.$

7. Решить неравенство $\dfrac{(x-1)^2(x+2)}{(x-3)^3(x+1)} \ge 0.$

8. Решить неравенство $\dfrac{(x+4)(x-1)^3}{x^4(x-5)^2} \le 0.$

9. Решить неравенство $\dfrac{x^2-5x+6}{1-x} < 0.$

10. Найти целое решение неравенства $\dfrac{2x^2+x+2}{x^2-1} < 0.$

11. Решить неравенство $\dfrac{x-3}{x^2+2x-5} > \dfrac{1}{2}.$

12. Найти наименьшее положительное решение неравенства $\dfrac{x^2-5x+4}{(x^2+2)(x+2)} \le 0.$

13. Решить неравенство $x-3+\dfrac{4}{x+1} > 0.$

14. Найти наименьшее решение неравенства $x \ge \dfrac{25}{1-x} - 9.$

15. Решить неравенство $x-1 > \dfrac{4x}{3-x}.$

16. Найти наименьшее целое решение неравенства $\dfrac{4x^2+45x}{x-1} \ge 25.$

17. Решить неравенство $\dfrac{1}{2x} \ge \dfrac{1}{1-x}.$

18. Найти сумму целых решений неравенства $\dfrac{4-x}{x-5} > \dfrac{1}{1-x}.$

19. Решить неравенство $\dfrac{7}{(x-2)(x-3)}+\dfrac{9}{x-3}+1\le 0$.

20. Найти сумму целых отрицательных решений неравенства $\dfrac{3x^2+x-9}{x}\ge -5$.

21. Решить неравенство $\dfrac{x}{x-1}\le\dfrac{x-2}{x}$.

22. Найти середину промежутка конечной длины, который является решением неравенства $\dfrac{2}{x+8}<\dfrac{2x-1}{x^2-1}$.

23. Решить неравенство $\dfrac{30x-9}{x-2}\ge 25(x+2)$.

24. Решить неравенство $\dfrac{1}{x^2+8x-9}\ge\dfrac{1}{3x^2-5x+2}$.

ГЛАВА 2. РАСКРЫТИЕ МОДУЛЕЙ В УРАВНЕНИЯХ И НЕРАВЕНСТВАХ

Уравнение вида $|f(x)| = g(x)$ решается следующим образом:

$$|f(x)| = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) = g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Такое решение называется «раскрытием модуля по определению». Кроме того, существует и другой способ решения этого уравнения:

$$|f(x)| = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right. \end{cases}$$

В частности, уравнение вида $|f(x)| = a$, где $a \geq 0$, можно решать следующим образом:

$$|f(x)| = a \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{array}\right.$$

Уравнение вида $|f(x)| = |g(x)|$ равносильно следующей совокупности:

$$|f(x)| = |g(x)| \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$$

Неравенства вида $|f(x)| < g(x)$ и $|f(x)| > g(x)$ можно решать, раскрывая модуль по определению:

$$|f(x)| < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) < g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) < g(x); \end{cases} \end{array}\right.$$

$$|f(x)| > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) > g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Кроме того, существует и другой способ решения этих неравенств:

$$|f(x)| < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) < g(x), \\ -f(x) < g(x); \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x); \end{cases}$$

$$|f(x)| > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ -f(x) > g(x); \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$$

В частности, неравенство вида $|f(x)| < c$ ($|f(x)| > c$), где $c > 0$, равносильно следующей системе (совокупности):

$$|f(x)| < c \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < c, \\ f(x) > -c; \end{cases} \qquad |f(x)| > c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > c, \\ f(x) < -c. \end{array}\right.$$

Неравенство вида $|f(x)| < |g(x)|$ решается следующим образом:

$$|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x) \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) < 0.$$

Если в уравнении или неравенстве модулей два или больше, мы поступаем следующим образом. Приравниваем все выражения, стоящие под знаком модуля, к нулю и полученные точки в нужном порядке расставляем на числовой прямой. Затем определяем знаки подмодульных выражений на каждом из образовавшихся промежутков и в соответствие с этими знаками раскрываем модули, т.е. данный модуль раскрывается на промежутке без изменения знака, если подмодульное выражение положительно, и с изменением знака, если оно отрицательно. Что касается концов промежутков, то поскольку подмодульное выражение там равно нулю, то модуль можно раскрыть любым из этих двух способов, т.е. общий конец двух промежутков можно включить в любой из них на свой выбор.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить уравнение

$$x^2 + 4|x - 3| - 7x + 11 = 0.$$

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$x^2 + 4|x - 3| - 7x + 11 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 3 \ge 0, \\ x^2 + 4(x - 3) - 7x + 11 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x - 3 < 0, \\ x^2 - 4(x - 3) - 7x + 11 = 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 3, \\ x^2 - 3x - 1 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 3, \\ x^2 - 11x + 23 = 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 3, \\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 3, \\ x = \dfrac{11 \pm \sqrt{29}}{2}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}, \\ x = \dfrac{11 - \sqrt{29}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}$, $x = \dfrac{11 - \sqrt{29}}{2}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$|x^2 + x - 1| = 2x - 1.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей системе:

$$|x^2 + x - 1| = 2x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 + x - 1 = 2x - 1, \\ x^2 + x - 1 = 1 - 2x; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - x = 0, \\ x^2 + 3x - 2 = 0; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1, \\ x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 1$, $x = \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{2}$.

Пример 3. Решить неравенство

$$x^2 - 7x - |3x - 1| < 12.$$

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$x^2 - 7x - |3x - 1| < 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x - 1 \ge 0, \\ x^2 - 7x - (3x - 1) < 12, \end{cases} \\ \begin{cases} 3x - 1 < 0, \\ x^2 - 7x + (3x - 1) < 12; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x \ge 1, \\ x^2 - 10x - 11 < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 3x < 1, \\ x^2 - 4x - 13 < 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge \frac{1}{3}, \\ -1 < x < 11, \end{cases} \\ \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ ,2 - \sqrt{17} < x < 2 + \sqrt{17}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{3} \le x < 11, \\ 2 - \sqrt{17} < x < \frac{1}{3}; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (2 - \sqrt{17}, 11).$$

Ответ: $x \in (2 - \sqrt{17}, 11)$.

Пример 4. Решить неравенство

$$x^2 - |5x - 3| - x < 2.$$

Решение. Перепишем данное неравенство в виде $|5x - 3| > x^2 - x - 2$.

Это неравенство равносильно следующей совокупности:

$$|5x - 3| > x^2 - x - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x - 3 > x^2 - x - 2, \\ 5x - 3 < 2 + x - x^2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 6x + 1 < 0, \\ x^2 + 4x - 5 < 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 - 2\sqrt{2} < x < 3 + 2\sqrt{2}, \\ -5 < x < 1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad x \in (-5; 3 + 2\sqrt{2}).$$

Ответ: $x \in (-5; 3 + 2\sqrt{2})$.

Пример 5. Решить уравнение

$$|x^2 - x - 1| = |x + 2|.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей совокупности:

$$|x^2 - x - 1| = |x + 2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 1 = x + 2, \\ x^2 - x - 1 = -x - 2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 3 = 0, \\ x^2 + 1 = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = -1$, $x = 3$.

Пример 6. Решить уравнение

$$|5x - 13| - |6 - 5x| = 7.$$

Решение. Разобьем числовую ось на три промежутка и определим знаки подмодульных выражений на каждом из этих промежутков.

x	$x \le 6/5$	$6/5 < x \le 13/5$	$x > 13/5$
$5x - 13$	$-$	$-$	$+$
$6 - 5x$	$+$	$-$	$-$

Раскрывая модули по определению, получим следующую совокупность:

$$|5x - 13| - |6 - 5x| = 7. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le \dfrac{6}{5}, \\ 13 - 5x - (6 - 5x) = 7, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{6}{5} < x \le \dfrac{13}{5}, \\ 13 - 5x - (5x - 6) = 7, \end{cases} \\ \begin{cases} x > \dfrac{13}{5}, \\ 5x - 13 - (5x - 6) = 7; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le \dfrac{6}{5}, \\ 7 = 7, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{6}{5} < x \le \dfrac{13}{5}, \\ x = \dfrac{6}{5}, \end{cases} \\ \begin{cases} x > \dfrac{13}{5}, \\ -7 = 7; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{6}{5}\right].$$

Ответ: $x \in \left(-\infty, \dfrac{6}{5}\right]$.

Пример 7. Решить неравенство

$$3|x-2| + |5x-4| \le 10.$$

Решение. Разобьем числовую ось на три промежутка и определим знаки подмодульных выражений на каждом из этих промежутков.

	$x < \frac{4}{5}$	$\frac{4}{5} < x < 2$	$x > 2$
$x - 2$	$-$	$-$	$+$
$5x - 4$	$-$	$+$	$+$

Раскрывая модули по определению, получим следующую совокупность:

$$3|x-2| + |5x-4| \le 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le \dfrac{4}{5}, \\ -3(x-2) - (5x-4) \le 10, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{4}{5} < x \le 2, \\ -3(x-2) + 5x - 4 \le 10, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 2, \\ 3(x-2) + 5x - 4 \le 10; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le \dfrac{4}{5}, \\ -8x + 10 \le 10, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{4}{5} < x \le 2, \\ 2x + 2 \le 10, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 2, \\ 8x - 10 \le 10; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le \dfrac{4}{5}, \\ x \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{4}{5} < x \le 2, \\ x \le 4, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 2, \\ x \le \dfrac{5}{2}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le x \le \dfrac{4}{5}, \\ \dfrac{4}{5} < x \le 2, \\ 2 < x \le \dfrac{5}{2}; \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{5}{2}\right].$$

Ответ: $x \in \left[0, \dfrac{5}{2}\right]$.

Пример 8. Решить уравнение

$2|x - 5| - 1 = 3|2x - 5| - 4|x - 1|.$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей совокупности:

$$2|x-5|-1=3|2x-5|-4|x-1| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 1, \\ 2(5-x)-1=3(5-2x)+4(x-1), \end{cases} \\ \begin{cases} 1 < x \le \dfrac{5}{2}, \\ 2(5-x)-1=3(5-2x)-4(x-1), \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{5}{2} < x \le 5, \\ 2(5-x)-1=3(2x-5)-4(x-1), \end{cases} \\ \begin{cases} x > 5, \\ 2(x-5)-1=3(2x-5)-4(x-1); \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 1, \\ 9=11, \end{cases} \\ \begin{cases} 1 < x \le \dfrac{5}{2}, \\ 8x=10, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{5}{2} < x \le 5, \\ 4x=20, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 5, \\ 11=11; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{4}, \\ x=5, \\ x>5; \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left\{\dfrac{5}{4}\right\} \cup [5,+\infty).$$

Ответ: $x \in \left\{\dfrac{5}{4}\right\} \cup [5,+\infty)$.

Пример 9. Решить уравнение

$$\frac{|x-2|}{|x-1|-1}=1.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей совокупности:

$$\frac{|x-2|}{|x-1|-1}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 1, \\ \dfrac{2-x}{(1-x)-1}=1, \end{cases} \\ \begin{cases} 1 < x \le 2, \\ \dfrac{2-x}{(x-1)-1}=1, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 2, \\ \dfrac{x-2}{(x-1)-1}=1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 1, \\ \dfrac{x-2}{x}=1, \end{cases} \\ \begin{cases} 1 < x \le 2, \\ \dfrac{2-x}{x-2}=1, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 2, \\ \dfrac{x-2}{x-2}=1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Уравнения первых двух систем решений не имеют, третья система имеет решением $x > 2$.

Ответ: $x \in (2, +\infty)$.

Пример 10. Решить неравенство

$$\frac{|x-5|-1}{2|x-6|-4} \le 1.$$

Решение. Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\frac{|x-5|-1}{2|x-6|-4} \le 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 5, \\ \dfrac{(5-x)-1}{2(6-x)-4} \le 1, \end{cases} \\ \begin{cases} 5 < x \le 6, \\ \dfrac{(x-5)-1}{2(6-x)-4} \le 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 6, \\ \dfrac{(x-5)-1}{2(x-6)-4} \le 1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 5, \\ \dfrac{4-x}{8-2x} \le 1, \end{cases} \\ \begin{cases} 5 < x \le 6, \\ \dfrac{x-6}{8-2x} \le 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 6, \\ \dfrac{x-6}{2x-16} \le 1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 5, \\ x \ne 4, \\ \dfrac{1}{2} \le 1, \end{cases} \\ \begin{cases} 5 < x \le 6, \\ \dfrac{3x-14}{x-4} \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 6, \\ \dfrac{x-10}{x-8} \ge 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 5, \\ x \ne 4, \end{cases} \\ \begin{cases} 5 < x \le 6, \\ \left[\begin{array}{l} x \ge \dfrac{14}{3}, \\ x < 4, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x > 6, \\ \left[\begin{array}{l} x < 8, \\ x \ge 10; \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 5, \\ x \ne 4, \end{cases} \\ 5 < x \le 6, \\ 6 < x < 8, \\ x \ge 10; \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 4) \cup (4, 8) \cup [10, +\infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty,\ 4) \cup (4,\ 8) \cup [10,\ +\infty)$.

Пример 11. Решить уравнение

$$\big||3 - x| - x + 1\big| + x = 6.$$

Решение. Данное уравнение эквивалентно следующей системе:

$$\big||3 - x| - x + 1\big| + x = 6 \Leftrightarrow \big||3 - x| - x + 1\big| = 6 - x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 - x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} |3 - x| - x + 1 = 6 - x, \\ |3 - x| - x + 1 = x - 6; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 6, \\ \left[\begin{array}{l} |3 - x| = 5, \\ |3 - x| = 2x - 7. \end{array}\right. \end{cases}$$

Первое из полученных уравнений равносильно совокупности:

$$|3 - x| = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 3 - x = 5, \\ 3 - x = -5; \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 8. \end{array}\right.$$

Решением системы при этом будет служить значение $x = -2$. Второе из полученных уравнений равносильно следующей системе:

$$|3-x| = 2x-7 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-7 \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} 3-x = 2x-7, \\ 3-x = 7-2x; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{7}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{10}{3}, \\ x = 4; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 4,$$

что также является решением задачи.

Ответ: $x = -2$, $x = 4$.

Пример 12. Решить неравенство

$$|x + |1-x|| > 3.$$

Решение. Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$|x + |1-x|| > 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + |1-x| > 3, \\ x + |1-x| < -3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |1-x| > 3-x, \\ |1-x| < -3-x; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x > 3-x, \\ 1-x < x-3, \\ \begin{cases} 1-x < -3-x, \\ 1-x > 3+x; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 > 3, \\ x > 2, \\ \begin{cases} 1 < -3, \\ x < -1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x > 2.$$

Ответ: $x \in (2, +\infty)$.

Пример 13. Решить неравенство

$$|x^2 - 2x - 3| < |x^2 - x + 4|.$$

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству:

$$|x^2 - 2x - 3| < |x^2 - x + 4| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((x^2 - 2x - 3) - (x^2 - x + 4)) \times$$

$$\times ((x^2 - 2x - 3) + (x^2 - x + 4)) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-x - 7)(2x^2 - 3x + 1) < 0 \Leftrightarrow (x + 7)(x - 1)(2x - 1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-7; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty).$$

Ответ: $x \in \left(-7; \dfrac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Решить уравнение $x^2 + 3x + |x + 3| = 0$.
2. Решить уравнение $|x^2 - 2x - 1| = x - 1$.
3. Решить уравнение $\dfrac{2x^2 - 6}{|x| - 1} = |x| + 3$.
4. Решить неравенство $x^2 - 2|x + 1| < 0$.
5. Решить неравенство $\left|\dfrac{x^2 - x - 6}{x + 2}\right| \geq 2$.
6. Решить неравенство $|x^2 - 8x + 15| < x - 3$.
7. Найти наибольшее целое решение неравенства $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$.
8. Найти наименьший из корней уравнения $|3x^2 + 5x - 9| = |6x + 15|$.
9. Найти наименьший целый корень уравнения $|x - 3| + 2|x + 1| = 4$.
10. Решить уравнение $|2x + 8| - |x - 5| = 12$.
11. Решить уравнение $|2x - 15| = 22 - |2x + 7|$.
12. Решить уравнение $\dfrac{|2x - 1|}{|x - 1|} = \dfrac{|2x + 1|}{|x + 1|}$.
13. Решить неравенство $|x - 1| + |2 - x| > 3$.
14. Решить неравенство $|x^2 - 1| < x^2 - |x| + 1$.
15. Решить неравенство $|x^2 - 2x - 3| + 2|x - 2| < 5$.
16. Решить неравенство $\dfrac{2x + 5}{|x + 1|} \geq 1$.
17. Решить неравенство $\dfrac{|x + 1| + |x - 2|}{x + 199} < 1$.

18. Решить неравенство $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{|x|-1}\geq\dfrac{2}{x-1}$.

19. Решить неравенство $\dfrac{|x-3|}{|x-2|-1}\geq 1$.

20. Решить неравенство $\dfrac{|2-x|-x}{|x-3|-1}\leq 2$.

21. Решить уравнение $\big||x-1|-7\big|=10$.

22. Решить уравнение $\left|x^2-3|x|+1\right|=1$.

23. Решить уравнение $\big|4x-|x-2|+3\big|=16$.

24. Решить уравнение $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4$.

25. Решить неравенство $|x^2+x-2|+|x+4|\leq x^2+2x+6$.

26. Решить неравенство $\dfrac{3|x|-11}{x-3}>\dfrac{3x+14}{6-x}$.

27. Решить неравенство $\dfrac{4|2-x|}{4-|x|}-|x-2|\leq 0$.

ГЛАВА 3. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ равносильно следующей системе:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ можно решать одним из следующих двух способов:

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Неравенство вида $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$ равносильно следующей системе:

$$\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Неравенство вида $\sqrt{f(x)} < g(x)$ решается следующим образом:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) < g^2(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

И, наконец, неравенство вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности двух систем:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x), \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Если в уравнении или неравенстве радикалов два или больше, мы поступаем следующим образом: находим область определения, возводим в квадрат два раза, при этом следим за знаками обеих частей уравнения или неравенства. Если знаки левой и правой частей разные, то в квадрат возводить нельзя. Возможно также рассмотрение двух случаев в зависимости от знака одной из частей неравенства.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить уравнение

$$\sqrt{24-10x}=3-4x.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей системе:

$$\sqrt{24-10x}=3-4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-4x \ge 0, \\ 24-10x=(3-4x)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{3}{4}, \\ 16x^2-14x-15=0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{3}{4}, \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2}, \\ x=-\dfrac{5}{8}; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{5}{8}.$$

Ответ: $x=-\dfrac{5}{8}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+5x-1}=\sqrt{x+4}.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей системе:

$$\sqrt{x^2+5x-1}=\sqrt{x+4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4 \ge 0, \\ x^2+5x-1=x+4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -4, \\ x^2+4x-5=0; \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Ответ: $x=1$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-x-3} \ge \sqrt{2x^2+x-3}.$$

Решение. Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\sqrt{x^2-x-3} \ge \sqrt{2x^2+x-3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+x-3 \ge 0, \\ x^2-x-3 \ge 2x^2+x-3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+x-3 \ge 0, \\ x^2+2x \le 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right] \cup [1, +\infty), \\ x \in [-2, 0]; \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-2, -\dfrac{3}{2}\right].$$

Ответ: $x \in \left[-2, -\dfrac{3}{2}\right]$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2+4x-5} - 2x + 3 > 0.$$

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\sqrt{x^2+4x-5} > 2x-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-3 < 0, \\ x^2+4x-5 \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-3 \ge 0, \\ x^2+4x-5 > (2x-3)^2; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < \dfrac{3}{2}, \\ x \in (-\infty, -5] \cup [1, +\infty), \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge \dfrac{3}{2}, \\ 3x^2 - 16x + 14 < 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty, -5] \cup \left[1, \dfrac{3}{2}\right), \\ \begin{cases} x \ge \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{8-\sqrt{22}}{3} < x < \dfrac{8+\sqrt{22}}{3}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty, -5] \cup \left[1, \dfrac{3}{2}\right), \\ \dfrac{3}{2} \le x < \dfrac{8+\sqrt{22}}{3}; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -5] \cup \left[1, \frac{8+\sqrt{22}}{3}\right).$$

Ответ: $x \in (-\infty, -5] \cup \left[1, \dfrac{8+\sqrt{22}}{3}\right)$.

Пример 5. Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\sqrt{x^2-3x+2} \le 3x-3.$$

Решение. Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\sqrt{x^2-3x+2} \le 3x-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2 \ge 0, \\ 3x-3 \ge 0, \\ x^2-3x+2 \le (3x-3)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2) \ge 0, \\ x \ge 1, \\ 8x^2-15x+7 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty), \\ x \in [1, +\infty), \\ x \in \left(-\infty, \frac{7}{8}\right] \cup [1, +\infty); \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{1\} \cup [2, +\infty).$$

Ответ: $x \in \{1\} \cup [2, +\infty)$.

Пример 6. Найти все действительные решения уравнения

$$\sqrt{2x^2-4x} = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}.$$

Решение. Найдем область определения данного уравнения, для чего решим следующую систему:

$$\begin{cases} 2x^2-4x \ge 0, \\ x^2-1 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty), \\ x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty).$$

Так как на области определения обе части уравнения неотрицательны, можем возвести их в квадрат:

$$2x^2-4x = x^2+1+2\sqrt{x^4-1}+x^2-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^4-1} = -2x \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \ge 0, \\ x^4-1 = 4x^2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0, \\ \left(x^2-(2+\sqrt{5})\right)\left(x^2-(2-\sqrt{5})\right) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0, \\ x^2 = 2+\sqrt{5}; \end{cases} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2+\sqrt{5}}.$$

Проверкой убеждаемся, что найденный корень принадлежит области определения данного уравнения.

Ответ: $x = -\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

Пример 7. Решить уравнение

$$\sqrt{15+5x} - \sqrt{19-5x} = 2.$$

Решение. Найдем область определения данного уравнения, для чего решим следующую систему:

$$\begin{cases} 15+5x \ge 0, \\ 19-5x \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3, \\ x \le \dfrac{19}{5}; \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-3, \frac{19}{5}\right].$$

Перепишем исходное уравнение следующим образом:

$$\sqrt{15+5x} = \sqrt{19-5x} + 2.$$

Так как на области определения обе части уравнения неотрицательны, можем возвести их в квадрат:

$$15+5x = 19-5x+4\sqrt{19-5x}+4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2\sqrt{19-5x} = 5x-4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x-4 \ge 0, \\ 76-20x = (5x-4)^2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{4}{5}, \\ 5x^2-4x-12=0; \end{cases} \Leftrightarrow\ x = 2.$$

Найденный корень принадлежит области определения данного уравнения.

Ответ: $x = 2$.

Пример 8. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-3}.$$

Решение. Найдем область определения данного уравнения, для чего решим следующую систему:

$$\begin{cases} x+2 \ge 0, \\ x-1 \ge 0, \\ 2x-3 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

Преобразуем уравнение к виду

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3}.$$

Так как на области определения обе части уравнения неотрицательны, можем возвести их в квадрат:

$$x + 2 = x - 1 + 2\sqrt{(x-1)(2x-3)} + 2x - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 3 - x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x \geq 0, \\ 2x^2 - 5x + 3 = (3-x)^2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3, \\ x^2 + x - 6 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 2. \end{array} \right.$$

Области определения удовлетворяет $x = 2$.

Ответ: $x = 2$.

Пример 9. Найти все действительные решения уравнения

$$(x+1)\sqrt{x^2 + x - 2} = 2x + 2.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$(x+1)(\sqrt{x^2 + x - 2} - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 1 = 0, \\ x^2 + x - 2 \geq 0, \end{cases} \\ \sqrt{x^2 + x - 2} - 2 = 0; \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x - 2} = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2,\ x = -3.$$

Ответ: $x = -3$, $x = 2$.

Пример 10. Решить неравенство

$$(x-1)\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0.$$

Решение. Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$(x-1)\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 2 = 0, \\ \begin{cases} x^2 - x - 2 > 0, \\ x - 1 \ge 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 2, \\ \begin{cases} x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty), \\ x \ge 1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 2, \\ x \in (2, +\infty); \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \{-1\} \cup [2, +\infty).$$

Ответ: $x \in \{-1\} \cup [2, +\infty)$.

Пример 11. Решить неравенство

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} < \sqrt{x-1}.$$

Решение. Найдем область определения данного неравенства, для чего решим следующую систему:

$$\begin{cases} x + 3 \ge 0, \\ x - 2 \ge 0, \\ x - 1 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow x \in [2, +\infty).$$

Преобразуем неравенство к виду

$$\sqrt{x+3} < \sqrt{x-2} + \sqrt{x-1}.$$

Так как на области определения обе части полученного неравенства неотрицательны, можем возвести их в квадрат:

$$x + 3 < x - 2 + 2\sqrt{(x-2)(x-1)} + x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - 3x + 2} > 6 - x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 6 - x \ge 0, \\ 4(x^2 - 3x + 2) > (6 - x)^2, \\ x \ge 2, \end{cases} \\ \begin{cases} 6 - x < 0, \\ x \ge 2; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 6, \\ x^2 > \dfrac{28}{3}, \\ x \ge 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 6, \\ x \ge 2; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 6, \\ x \in \left(-\infty, -\sqrt{\dfrac{28}{3}}\right), \cup \left(\sqrt{\dfrac{28}{3}}, +\infty\right), \\ x \ge 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 6, \\ x \ge 2; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \left(\sqrt{\dfrac{28}{3}}, 6\right], \\ x > 6; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(\sqrt{\frac{28}{3}}, +\infty\right).$$

При этом равносильный переход от неравенства к совокупности был осуществлен с учетом найденной области определения.

Ответ: $x \in \left(\sqrt{\dfrac{28}{3}}, +\infty\right)$.

Пример 12. Решить неравенство

$$\sqrt{1-x} - \sqrt{x} > \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Решение. Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\sqrt{1-x} - \sqrt{x} > \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \ge 0, \\ x \ge 0, \\ 1 - x > x, \\ 1 - x - 2\sqrt{(1-x)x} + x > \dfrac{1}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1, \\ x \ge 0, \\ x < \dfrac{1}{2}, \\ \sqrt{x - x^2} < \dfrac{1}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x < \dfrac{1}{2}, \\ x - x^2 < \dfrac{1}{9}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x < \dfrac{1}{2}, \\ 9x^2 - 9x + 1 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x < \dfrac{1}{2}, \\ x \in \left(-\infty, \dfrac{3-\sqrt{5}}{6}\right) \cup \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{6}, +\infty\right); \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[0, \dfrac{3-\sqrt{5}}{6}\right).$$

Ответ: $x \in \left[0, \dfrac{3-\sqrt{5}}{6}\right)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Решить уравнение $\sqrt{6-4x-x^2} = x+4$.
2. Решить уравнение $2\sqrt{x+5} = x+2$.
3. Решить уравнение $\sqrt{x^3-x} = \sqrt{x-1}$.
4. Решить уравнение $\sqrt{-x^2-x} = \sqrt{x^2-1}$.
5. Решить уравнение $\sqrt{x^4-10x^2+25} = \sqrt{x^4-4x^2+4}$.
6. Решить неравенство $\sqrt{x+5} \ge \sqrt{3x-10}$.
7. Решить неравенство $\sqrt{x^2-x-1} > \sqrt{x+7}$.
8. Решить неравенство $\sqrt{7+x} \ge 7-2x$.
9. Решить неравенство $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$.
10. Решить неравенство $\sqrt{2x^2+15x-17} > x+3$.
11. Решить неравенство $\sqrt{x-1} < 3-x$.
12. Решить неравенство $\sqrt{9x-20} < x$.
13. Решить неравенство $x > \sqrt{x^2-x-12}$.
14. Решить неравенство $\sqrt{x^2-5x+4} \le 4-x$.
15. Решить уравнение $\sqrt{3x-5} - \sqrt{4-x} = 1$.
16. Решить уравнение $\sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6$.

17. Решить уравнение $\sqrt{x+2}+\sqrt{8-x}=\sqrt{15}$.

18. Решить уравнение $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7$.

19. Решить уравнение $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}=\sqrt{x-2}$.

20. Решить неравенство $\sqrt{1+x}>1+\sqrt{1-x}$.

21. Решить неравенство $\sqrt{2-x}-\sqrt{4+x}\le\sqrt{x+3}$.

22. Найти наибольшее целое решение неравенства $\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+1}-\sqrt{2-x}<0$.

23. Решить неравенство $\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}>-\sqrt{x-5}$.

24. Решить неравенство $\sqrt{x^2+3x+2}<1+\sqrt{x^2-x+1}$.

25. Решить уравнение $(x^2-x-6)\sqrt{\dfrac{x^2-1}{2x}}=0$.

26. Решить уравнение $(x+1)\sqrt{16x+17}=(x+1)(8x-23)$.

27. Решить неравенство $(x-1)\sqrt{-x^2+x+6}\ge 0$.

28. Решить неравенство $\sqrt{-25x^2+15x-2}\cdot(8x^2-6x+1)\ge 0$.

ГЛАВА 4. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

4.1. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

В этом разделе мы приведем основные формулы, которые будут необходимы при решении показательных и логарифмических уравнений и неравенств. Кроме этого, приводятся схемы решений простейших показательных и логарифмических уравнений и неравенств.

$$a_m \cdot a_n = a^{m+n};$$
$$a^m : a^n = a^{m-n};$$
$$(a^m)^n = a^{mn};$$
$$(ab)^n = a^n \cdot b^n;$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};$$

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc, \text{ но } \log_a bc = \log_a|b| + \log_a|c|;$$
$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}, \text{ но } \log_a \frac{b}{c} = \log_a|b| - \log_a|c|;$$
$$c\log_a b = \log_a b^c, \text{ но } \log_a b^c = c\log_a|b|;$$
$$\log_{a^c} b = \frac{1}{c}\log_{|a|} b;$$
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \Rightarrow \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Уравнение вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$ при $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Неравенство вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$ при $a > 1$ и неравенству $f(x) < g(x)$ при $a \in (0, 1)$.

Уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно одной из следующих систем:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Уравнение вида $\log_{f(x)} g(x) = a$ равносильно системе

$$\log_{f(x)} g(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (f(x))^a = g(x), \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1. \end{cases}$$

Уравнение вида $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{h(x)}$ равносильно следующей совокупности:

$$(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{h(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(x) = 1, \\ \begin{cases} g(x) = h(x), \\ f(x) > 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Неравенство вида $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ равносильно системе

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases}$$

если $a > 1$, и системе

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0, \end{cases}$$

если $a \in (0,1)$.

4.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СУММЫ И РАЗНОСТИ ЛОГАРИФМОВ

Рассмотрим несколько примеров, при решении которых применяются формулы преобразования суммы и разности логарифмов. При решении данного типа задач необходимо найти область определения уравнения или неравенства.

Пример 1. Решить уравнение

$$\log_3 x - \log_3(x + 8) = -\log_3(x + 3).$$

Решение. Найдем область определения данного уравнения, для чего решим следующую систему:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x + 8 > 0, \\ x + 3 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x > -8, \\ x > -3; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, +\infty).$$

Преобразуем исходное уравнение следующим образом:

$$\log_3 x - \log_3(x + 8) = -\log_3(x + 3) \Leftrightarrow \log_3 x + \log_3(x + 3) =$$
$$= \log_3(x + 8) \Leftrightarrow \log_3 x(x + 3) = \log_3(x + 8) \Leftrightarrow x(x + 3) = x + 8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ или } x = -4.$$

Области определения удовлетворяет только $x = 2$.
Ответ: $x = 2$.

Пример 2. Решить неравенство

$$2\log_{\frac{1}{2}}(x - 2) - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 2) \geq 1.$$

Решение. Найдем область определения неравенства, для чего решим следующую систему:

$$\begin{cases} x - 2 > 0, \\ x^2 - x - 2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty); \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2, +\infty).$$

На области определения преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$2\log_{\frac{1}{2}}(x - 2) - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 2) \geq 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x - 2)^2 - 1 \geq \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}2(x - 2)^2 \geq \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(x - 2)2 \leq x^2 - x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [2, 5].$$

С учетом области определения получаем, что $x \in (2, 5]$.
Ответ: $x \in (2, 5]$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\lg(x - 3) + \lg x < \lg\left(\frac{9x}{2} + 4\right).$$

Решение. Найдем область определения неравенства, для чего решим следующую систему:

$$\begin{cases} x - 3 > 0, \\ x > 0, \\ \dfrac{9x}{2} + 4 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ x > 0, \\ x > -\dfrac{8}{9}; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (3, +\infty).$$

На области определения преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$\lg(x-3)+\lg x<\lg\left(\frac{9x}{2}+4\right)\Leftrightarrow \lg(x(x-3))<\lg\left(\frac{9x}{2}+4\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x<\frac{9x}{2}+4\Leftrightarrow 2x^2-15x-8<0\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{1}{2},8\right).$$

С учетом области определения получаем, что $x \in (3, 8)$.

Ответ: $x \in (3, 8)$.

Пример 4. Найти число корней уравнения

$$\log_3(x+8)+\frac{1}{2}\log_3 x^2=2.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\log_3(x+8)+\frac{1}{2}\log_3 x^2=2\Leftrightarrow \log_3(x+8)+\log_3|x|=2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x+8)|x|=\log_3 9\Leftrightarrow (x+8)|x|=9\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\(x+8)x=9,\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\-(x+8)x=9;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\x^2+8x-9=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\x^2+8x+9=0;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\x=-4\pm\sqrt{7}.\end{array}\right.$$

Таким образом, исходное уравнение имеет три корня.

Ответ: 3.

Пример 5. Решить неравенство

$$\log_2((x-3)(x+2))+\log_{\frac{1}{2}}((x+2)(x-6))\le 2.$$

Решение. Найдем область определения неравенства, для чего решим следующую систему:

$$\begin{cases}(x-3)(x+2)>0,\\(x+2)(x-6)>0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty,-2)\cup(3,+\infty),\\x\in(-\infty,-2)\cup(6,+\infty);\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty,\ -2)\cup(6,\ +\infty).$$

На области определения преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$\log_2((x-3)(x+2)) + \log_{\frac{1}{2}}((x+2)(x-6)) \le 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2((x-3)(x+2)) \le \log_2((x+2)(x-6)) + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2((x-3)(x+2)) \le \log_2 4((x+2)(x-6)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+2) \le 4(x+2)(x-6) \Leftrightarrow (x+2)(4(x-6) -$$

$$- x + 3) \ge 0 \Leftrightarrow (x+2)(3x-21) \ge 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [7, +\infty).$$

С учетом области определения получаем, что $x \in (-\infty, -2) \cup$ $\cup [7, +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty, -2) \cup [7, +\infty)$.

Пример 6. Решить уравнение $\dfrac{\log_2(x+3)}{\log_{\frac{1}{2}}(x-5)} = 1$.

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\frac{\log_2(x+3)}{\log_{\frac{1}{2}}(x-5)} = 1 \Leftrightarrow -\frac{\log_2(x+3)}{\log_2(x-5)} = 1 \Leftrightarrow \frac{\log_2(x+3)}{\log_2(x-5)} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(x+3) + \log_2(x-5)}{\log_2(x-5)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5 > 0, \\ \log_2(x-5) \ne 0, \\ \log_2(x+3) + \log_2(x-5) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 5, \\ x \ne 6, \\ \log_2(x+3)(x-5) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5, \\ x \ne 6, \\ (x+3)(x-5) = 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 5, \\ x \ne 6, \\ x^2 - 2x - 16 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{17}.$$

Ответ: $x = 1 + \sqrt{17}$.

Пример 7. Решить неравенство

$$\log_4(4-x)^2 - \log_2\frac{4-x}{5-x} > 0.$$

Решение. Найдем область определения неравенства, для чего решим следующую систему:

$$\begin{cases}(4-x)^2>0,\\ \dfrac{4-x}{5-x}>0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ne 4,\\ x\in(-\infty,4)\cup(5,+\infty);\end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty,4)\cup(5,+\infty).$$

На области определения преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$\log_4(4-x)^2-\log_2\frac{4-x}{5-x}>0 \Leftrightarrow \log_2|4-x|-\log_2\frac{4-x}{5-x}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2\frac{|4-x|(5-x)}{4-x}>0.$$

Если $x<4$, данное неравенство принимает вид $\log_2(5-x)>$ >0, откуда $5-x>1$ и $x<4$. Если же $x>5$ получаем, что $\log_2(x-5)>0$, следовательно $x-5>1$ и $x>6$. Таким образом, ответом к задаче будут служить $x\in(-\infty,4)\cup$ $\cup(6,+\infty)$.

Ответ: $x\in(-\infty,4)\cup(6,+\infty)$.

Пример 8. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{2}}(6+x-x^2)+\log_2(x^2-4x+4)+2>2\log_4(x^2-6x+8)^2.$$

Решение. Найдем область определения неравенства, для чего решим следующую систему:

$$\begin{cases}6+x-x^2>0,\\ x^2-4x+4>0,\\ (x^2-6x+8)^2>0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2<x<3,\\ x\ne 2,\\ x\ne 2,\ x\ne 4;\end{cases} \Leftrightarrow x\in(-2,2)\cup(2,3).$$

На области определения преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$\log_{\sqrt{2}}(6+x-x^2)+\log_2(x^2-4x+4)+2>2\log_4(x^2-6x+8)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2(6+x-x^2)+2\log_2|x-2|+2>2\log_2(|x-2|\cdot|x-4)| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(6+x-x^2)+\log_2|x-2|+1>\log_2(|x-2|\cdot(4-x)),$$

так как на всей области определение выполнено неравенство $x<4$. Имеем далее:

$$\log_2(6+x-x^2)+\log_2|x-2|+1>\log_2(|x-2|\cdot(4-x)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2(6+x-x^2)\cdot|x-2|)>\log_2(|x-2|\cdot(4-x)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(6 + x - x^2)\cdot|x-2| > |x-2|\cdot(4-x) \Leftrightarrow 2(6 + x - x^2) >$$
$$> 4 - x,$$

так как число $|x - 2|$ положительно при всех x из области определения. И, наконец,

$$2(6 + x - x^2) > 4 - x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 8 < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in \left(\frac{3-\sqrt{73}}{4}, \frac{3+\sqrt{73}}{4}\right).$$

С учетом области определения получаем, что $x \in \left(\frac{3-\sqrt{73}}{4}, 2\right) \cup \left(2, \frac{3+\sqrt{73}}{4}\right)$.

Ответ: $x \in \left(\frac{3-\sqrt{73}}{4}, 2\right) \cup \left(2, \frac{3+\sqrt{73}}{4}\right)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Решить уравнение $3 + 2\log_2(x - 7) = \log_2(2x + 1)$.
2. Решить уравнение $2\lg\left(x + \frac{1}{2}\right) - \lg(x - 1) = \lg\left(x + \frac{5}{2}\right) + \lg 2$.
3. Решить уравнение $\log_4(x^2 - 4x + 2) - \log_4(x^2 - 6x + 5) = -\frac{1}{2}$.
4. Найти число корней уравнения $2\log_3(x - 2) + \log_3(x - 4)^2 = 0$.
5. Решить уравнение $\log_3(x - 5)^2 - 4 = \log_{\sqrt{3}}(x - 1)$.
6. Решить уравнение $\log_{16}(x^2 - 2x - 3)^2 - 2\log_{16}(x^2 + x - 2) = \frac{1}{2}$.
7. Найти наименьшее целое решение неравенства $\log_{0,5}(x^2 - 3x + 4) - \log_{0,5}(x - 1) < -1$.
8. Решить неравенство $\log_5(x + 2) + \log_5(1 - x) \ge \log_5((1 - x)(x^2 - 8x - 8))$.

9. Решить неравенство $4\log_4(x+1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x-5) < 6$.

10. Решить неравенство $\log_2\frac{3x-2}{x-1} + 3\log_8\frac{(x-1)^3}{3x-2} < 1$.

11. Решить неравенство $\log_3(x^3 + x^2 - 2x) - 2\log_9(x^2 - x) < \log_3 5$.

12. Решить неравенство $\log_{27}(x^2 + 4x + 3)^3 + \log_3(x^2 - 4x + 3) < 2$.

13. Решить неравенство $\log_2((3 + 2x - x^2)(x - 2)) - \log_3((4 - 4x + x^2)(8x - 16)) + 1 > 0$

14. Решить неравенство $\log_5\frac{5-x}{2-x} \geq \log_{25}\sqrt{(x-5)^4} - 1$.

15. Решить неравенство $\log_4(x^2-4)^2 + \log_2\frac{x-1}{x^2-4} > 0$.

16. Решить неравенство $3\log_{11}(x^2 + 8x - 9) \leq 4 + \log_{11}\frac{(x-1)^3}{x+9}$.

4.3. МЕТОД ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ

Одним из основных методов решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств является метод замены переменной. При помощи замены уравнение или неравенство, как правило, сводится к квадратному. Необходимо помнить при этом, что выражение a^x, где $a > 0$, при всех x принимает только положительные значения.

Пример 1. Решить уравнение

$$9^x - 75 \cdot 3^{x-1} - 54 = 0.$$

Решение. Пусть $y = 3^x$, $y > 0$. Тогда исходное уравнение примет следующий вид:

$$y^2 - 25y - 54 = 0 \Leftrightarrow y = 27 \text{ или } y = -2.$$

Условию $y > 0$ удовлетворяет $y = 27$. Значит,

$$y = 27 \Leftrightarrow 3^x = 27 \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ: $x = 3$.

Пример 2. Решить уравнение

$$3 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0.$$

Решение. Разделим обе части данного уравнения на 25^x, что возможно, так как это выражение положительно при всех значениях переменной x. Имеем:

$$3 \cdot \left(\frac{4}{25}\right)^x - 7 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x + 2 = 0.$$

Пусть $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$, $y > 0$. Тогда полученное уравнение примет следующий вид:

$$3y^2 - 7y + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2, \\ y = \frac{1}{3}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{5}\right)^x = 2, \\ \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{1}{3}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_{\frac{2}{5}} 2, \\ x = \log_{\frac{2}{5}} \frac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \log_{\frac{2}{5}} 2$, $x = \log_{\frac{2}{5}} \frac{1}{3}$.

Пример 3. Решить уравнение

$$4^{\sqrt{x}+1,5} - 13 \cdot 2^{\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}} + 20 = 0.$$

Решение. При $x \neq 1$ преобразуем данное уравнение следущим образом:

$$4^{\sqrt{x}+1,5} - 13 \cdot 2^{\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}} + 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4^{\sqrt{x}+1,5} - 13 \cdot 2^{\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}} + 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4^{\sqrt{x}+1,5} - 13 \cdot 2^{\sqrt{x}+1} + 20 = 0 \Leftrightarrow 8 \cdot 4^{\sqrt{x}} - 26 \cdot 2^{\sqrt{x}} + 20 = 0.$$

Пусть $2^{\sqrt{x}} = t$, тогда

$$8t^2 - 26t + 20 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 13t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ или } t = \frac{5}{4}.$$

Если $t = 2$, то $2^{\sqrt{x}} = 2$, откуда $x = 1$, что не удовлетворяет области определения данного уравнения.

Если же $t = \frac{5}{4}$, то $2^{\sqrt{x}} = \frac{5}{4}$, откуда $\sqrt{x} = \log_2 \frac{5}{4}$ и $x = \log_2^2 \frac{5}{4}$ (так как верно неравенство $\log_2 \frac{5}{4} > 0$).

Ответ: $x = \log_2^2 \frac{5}{4}$.

Пример 4. Решить неравество

$$\frac{7}{9^x - 2} \geq \frac{2}{3^x - 1}.$$

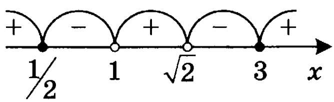
Решение. Пусть $y = 3^x$, $y > 0$. Тогда неравенство примет следующий вид:

$$\frac{7}{y^2 - 2} \geq \frac{2}{y - 1} \Leftrightarrow \frac{2y^2 - 7y + 3}{(y^2 - 2)(y - 1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)(y - 3)}{(y - \sqrt{2})(y + \sqrt{2})(y - 1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\underset{(т.к.\ y + \sqrt{2} > 0)}{\Leftrightarrow} \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)(y - 3)}{(y - \sqrt{2})(y - 1)} \leq 0.$$

Решим данное неравенство методом интервалов.



Получим:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} \leq y < 1, \\ \sqrt{2} < y \leq 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} \leq 3^x < 1, \\ \sqrt{2} < 3^x \leq 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 \frac{1}{2} \leq x < 0, \\ \log_3 \sqrt{2} < x \leq 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \left[\log_3 \frac{1}{2}, 0\right) \cup (\log_3 \sqrt{2}, 1]$.

Пример 5. Решить неравенство

$$2 \cdot 2^{-2x^2} - 7 \cdot 2^{-x^2} + 3 > 0.$$

Решение. Пусть $y = 2^{-x^2}$, $y > 0$. Тогда данное неравенство примет следующий вид:

$$2y^2-7y+3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y<\frac{1}{2}, \\ y>3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{-x^2}<\frac{1}{2}, \\ 2^{-x^2}>3; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2<-1, \\ -x^2>\log_2 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2>1, \\ x^2<-\log_2 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty),$$

так как второе неравенство совокупности решений не имеет, поскольку $-\log_2 3 < 0$.

Ответ: $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$.

Пример 6. Решить неравенство

$$5 \cdot 9^x - 18 \cdot 15^x + 9 \cdot 25^x > 0.$$

Решение. Разделим обе части исходного неравенства на 25^x. Имеем:

$$5 \cdot 9^x - 18 \cdot 15^x + 9 \cdot 25^x > 0 \Leftrightarrow 5 \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^x - 18 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x + 9 > 0.$$

Пусть $\left(\frac{3}{5}\right)^x = y$, $y > 0$. Тогда неравенство примет следующий вид:

$$5y^2-18y+9>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y<\frac{3}{5}, \\ y>3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{5}\right)^x<\frac{3}{5}, \\ \left(\frac{3}{5}\right)^x>3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1, \\ x<\log_{\frac{3}{5}} 3. \end{array}\right.$$

Таким образом, ответом к задаче будет служить $x \in \left(-\infty, \log_{\frac{3}{5}} 3\right) \cup (1,+\infty)$.

Ответ: $x \in \left(-\infty, \log_{\frac{3}{5}} 3\right) \cup (1,+\infty)$.

Пример 7. Решить уравнение

$$\lg^2 x^2 - 3\lg x - 1 = 0.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\lg^2 x^2 - 3\lg x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2\lg x)^2 - 3\lg x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\lg^2 x - 3\lg x - 1 = 0.$$

Пусть $\lg x = y$. Имеем:

$$4y^2 - 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1, \\ y = -\frac{1}{4}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x = 1, \\ \lg x = -\frac{1}{4}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10, \\ x = 10^{-\frac{1}{4}}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 10,\ x = \frac{1}{\sqrt[4]{10}}$.

Пример 8. Решить уравнение

$$\log_{0,5}^2 4x + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\log_{0,5}^2 4x + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8 \Leftrightarrow (-\log_2 4x)^2 + \log_2 x^2 - \log_2 8 = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2 + \log_2 x)^2 + 2\log_2 x - 11 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x + 6\log_2 x - 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1, \\ \log_2 x = -7; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 2^{-7}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = \frac{1}{128}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 2,\ x = \frac{1}{128}$.

Пример 9. Решить уравнение

$$\sqrt{\log_2 x} + 1 = \log_2 x - \sqrt{\log_{16} x}.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\sqrt{\log_2 x} + 1 = \log_2 x - \sqrt{\log_{16} x} \Leftrightarrow \sqrt{\log_2 x} + 1 = \log_2 x - \frac{1}{2}\sqrt{\log_2 x}.$$

Пусть $t = \sqrt{\log_2 x}$, $t \ge 0$. Имеем:

$$t + 1 = t^2 - \frac{t}{2} \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \quad \text{или} \quad t = -\frac{1}{2}.$$

Подходит только $t = 2$. Тогда $\sqrt{\log_2 x} = 2$, откуда $\log_2 x = 4$ и $x = 16$.

Ответ: $x = 16$.

Пример 10. Найти все значения x, для которых справедливо неравенство

$$2\log_7 x - \log_x 49 < 3.$$

Решение. Пусть $y = \log_7 x$. Тогда данное неравенство примет следующий вид:

$$2y - \frac{2}{y} < 3 \Leftrightarrow \frac{2y^2 - 3y - 2}{y} < 0 \Leftrightarrow \frac{(y-2)\left(y + \frac{1}{2}\right)}{y} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0,2) \Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{7}}\right) \cup (1, 49).$$

Ответ: $x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{7}}\right) \cup (1, 49)$.

Пример 11. Решить неравенство

$$(\log_{\frac{1}{2}} x + 2)(2 - \log_{\frac{1}{4}} x^2) \le \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{64}.$$

Решение. Преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$(\log_{\frac{1}{2}} x + 2)(2 - \log_{\frac{1}{4}} x^2) \le \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{64} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_{\frac{1}{2}} x + 2)(2 - \log_{\frac{1}{2}} x) \le 3\log_{\frac{1}{2}} x + 6.$$

Пусть $\log_{\frac{1}{2}} x = y$. Имеем:

$$(y+2)(2-y) \le 3y + 6 \Leftrightarrow y^2 + 3y + 2 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y \le -2, \\ y \ge -1; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{\frac{1}{2}} x \le -2, \\ \log_{\frac{1}{2}} x \ge -1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 4, \\ 0 < x \le 2; \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (0, 2] \cup [4, +\infty).$$

Ответ: $x \in (0,\ 2] \cup [4,\ +\infty)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Решить уравнение $\dfrac{9}{2^{x-2}} = \dfrac{10 + 4^{\frac{x}{2}}}{4}$.

2. Решить уравнение $3 \cdot 16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x$.

3. Решить уравнение $3^{2(x+1)^2+1} - 87 \cdot 3^{x^2+2x} + 18 = 0$.

4. Найти меньший корень уравнения $(2 \cdot 3^x + 5^x) \cdot (3^{x+1} + 2 \cdot 5^x) = 15^{x+1}$.

5. Решить неравенство $9^{2x+0,5} - 10 \cdot 3^{2x} > \frac{11}{3}$.

6. Решить неравенство $9^{\sqrt{x^2-3}} + 3 < 28 \cdot 3^{\sqrt{x^2-3}-1}$.

7. Решить неравенство $3 \cdot 49^x - 16 \cdot 21^x + 21 \cdot 9^x < 0$.

8. Решить неравенство $2^{\frac{1-x}{x}} < 2^{\frac{1-2x}{2x}} + 1$.

9. Решить неравенство $\dfrac{2^x - 2^{2-x} - 3}{2^x - 2} \geq 0$.

10. Решить неравенство $\dfrac{11 \cdot 3^{x-1} - 31}{4 \cdot 9^x - 11 \cdot 3^{x-1} - 5} \geq 5$.

11. Решить неравенство $3^x - 3^{0,5-x} > \sqrt{3} - 1$.

12. Решить неравенство $3 \cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 3 < 10 \cdot 2^{\sqrt{2-x}}$.

13. Решить уравнение $\log_2^2 x + 3\log_{\frac{1}{2}} x + 2 = 0$.

14. Решить уравнение $\log_x \sqrt[3]{4} + 3\log_x(x\sqrt[3]{2}) + \log_x^2 \sqrt[3]{4} = 12$.

15. Найти $\log_3 x$, если $x < 3$ и $\log_3 3x \cdot \log_3 9x \cdot \log_3 27x = \log_3^3 x + 23$.

16. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) > \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}}(x-2)} + \dfrac{3}{2}$.

17. Решить неравенство $\dfrac{\log_2 x - 3}{6\log_x 2 - 1} \leq 2$.

18. Решить неравенство $\log_{(x+1)^2} 8 + 3\log_4(x+1) \geq \dfrac{37}{4}$.

19. Решить неравенство $\log_2(2^x - 3) \cdot \log_{\sqrt{2}}(4^{x+2} - 12 \cdot 2^{x+3} + 144) < 32$.

20. Решить неравенство $\dfrac{3 \cdot 2^{1-x} + 1}{2^x - 1} \geq \dfrac{1}{1 - 2^{-x}}$.

21. Решить неравенство $\log_{25}(5^x - 1) \cdot \log_5(5^{x+2} - 25) < 4$.

22. Решить неравенство $2(\log_x 2 - 1)\log_2(2x) \leq 3$.

23. Решить неравенство $\log_{x+3}(9 - x^2) - \dfrac{1}{16}\log^2_{x+3}(x - 3)^2 \geq 2$.

24. Решить неравенство $\log^3_x 16 + 2\log^2_x 16^2 + 4\log_x 16^4 \geq 0$.

4.4. РАСЩЕПЛЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ

В данном разделе рассматриваются, как правило, такие неравенства, где основание показательных и логарифмических функций содержит переменную. Так как при разных значениях переменной основание может быть как больше, так и меньше единицы, необходимо рассматривать два случая. При решении такого типа неравенств можно использовать схемы, которые приведены ниже.

Неравенство вида $(f(x))^{g(x)} > (f(x))^{h(x)}$ равносильно следующей совокупности:

$$(f(x))^{g(x)} > (f(x))^{h(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 1, \\ g(x) > h(x), \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ g(x) < h(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Неравенство вида $(f(x))^{g(x)} \geq (f(x))^{h(x)}$ равносильно совокупности:

$$(f(x))^{g(x)} \geq (f(x))^{h(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x \geq 1, \\ g(x) \geq h(x), \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) \leq 1, \\ g(x) \leq h(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Неравенство вида $\log_{f(x)}g(x) > a$ равносильно совокупности двух систем:

$$\log_{f(x)}g(x) > a \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ 0 < g(x) < (f(x))^a, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 1, \\ g(x) > (f(x))^a. \end{cases} \end{array}\right.$$

И, наконец, неравенство вида $\log_{f(x)}g(x) < a$ равносильно следующей совокупности:

$$\log_{f(x)}g(x) < a \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ g(x) > (f(x))^a, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 1, \\ 0 < g(x) < (f(x))^a. \end{cases} \end{array}\right.$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить неравенство

$$\log_{x^2-9}(x^2 + 8x + 12) \le \log_{x^2-9}12.$$

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\log_{x^2-9}(x^2 + 8x + 12) \le \log_{x^2-9}12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x^2 - 9 < 1, \\ x^2 + 8x + 12 \ge 12, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 9 > 1, \\ 0 < x^2 + 8x + 12 \le 12; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 9 < x^2 < 10, \\ x^2 + 8x \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 > 10, \\ x^2 + 8x + 12 > 0, \\ x^2 + 8x \le 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\sqrt{10}, -3) \cup (3, \sqrt{10}), \\ x \in (-\infty, -8] \cup [0, +\infty), \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-\infty, -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}, +\infty), \\ x \in (-\infty, -6) \cup (-2, +\infty), \\ -8 \le x \le 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 < x < \sqrt{10}, \\ -8 \le x < -6; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [-8, -6) \cup (3, \sqrt{10}).$$

Ответ: $x \in [-8, -6) \cup (3, \sqrt{10})$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1.$$

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < 2x < 1, \\ x^2 - 5x + 6 > 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x > 1, \\ 0 < x^2 - 5x + 6 < 2x; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2}, \\ x^2 - 7x + 6 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ x^2 - 5x + 6 > 0, \\ x^2 - 7x + 6 < 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2}, \\ x \in (-\infty, 1) \cup (6, +\infty), \end{cases} \\ \begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty), \\ 1 < x < 6; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < \frac{1}{2}, \\ x \in (1, 2) \cup (3, 6); \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, 2) \cup (3, 6).$$

Ответ: $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, 2) \cup (3, 6)$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\left(1 - \frac{2x}{5}\right)^{7+11x-6x^2} \geq 1.$$

Решение. Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\left(1-\frac{2x}{5}\right)^{7+11x-6x^2} \geq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-\dfrac{2x}{5} \geq 1, \\ 7+11x-6x^2 \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < 1-\dfrac{2x}{5} \leq 1, \\ 7+11x-6x^2 \leq 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq 0, \\ -\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{7}{3}, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \leq x < \dfrac{5}{2}, \\ x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{7}{3}, +\infty\right); \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} \leq x \leq 0, \\ \dfrac{7}{3} \leq x < \dfrac{5}{2}; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cup \left[\frac{7}{3}, \frac{5}{2}\right).$$

Ответ: $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cup \left[\frac{7}{3}, \frac{5}{2}\right)$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\log_{2x-x^2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^4 > 0.$$

Решение. Преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$\log_{2x-x^2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^4 > 0 \Leftrightarrow \log_{1-(x-1)^2}\left|x-\frac{3}{2}\right| > 0.$$

Так как основание логарифма при любом допустимом x не превосходит единицу, полученное неравенство равносильно следующей системе:

$$\log_{1-(x-1)^2}\left|x-\frac{3}{2}\right| > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 1-(x-1)^2 < 1, \\ 0 < \left|x-\dfrac{3}{2}\right| < 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 < 1, \\ x \neq 1, \\ \left|x-\dfrac{3}{2}\right| < 1, \\ x \neq \dfrac{3}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x - 1 < 1, \\ x \neq 1, \\ -1 < x - \dfrac{3}{2} < 1, \\ x \neq \dfrac{3}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2, \\ x \neq 1, \\ \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{5}{2}, \\ x \neq \dfrac{3}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right).$$

Ответ: $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

Пример 5. Найти все решения неравенства

$$\log_{10-x}\left(\frac{19}{2} - x\right)^2 > 2\log_{x-9}(x-9).$$

Решение. Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\log_{10-x}\left(\frac{19}{2} - x\right)^2 > 2\log_{x-9}(x-9) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 9 > 0, \\ x - 9 \neq 1, \\ 2\log_{10-x}\left|\dfrac{19}{2} - x\right| > 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 9, \\ x \neq 10, \\ \log_{10-x}\left|\dfrac{19}{2} - x\right| > 1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

Так как при указанных значениях переменной x основание логарифма не может быть больше единицы, полученную систему можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} x > 9, \\ x \neq 10, \\ \log_{10-x}\left|\dfrac{19}{2} - x\right| > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 < x < 10, \\ 0 < \left|\dfrac{19}{2} - x\right| < 10 - x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 < x < 10, \\ x \neq \dfrac{19}{2}, \\ \dfrac{19}{2} - x < 10 - x, \\ \dfrac{19}{2} - x > x - 10; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 < x < 10, \\ x \neq \dfrac{19}{2}, \\ x < \dfrac{39}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(9, \frac{19}{2}\right) \cup \left(\frac{19}{2}, \frac{39}{4}\right).$$

Ответ: $x \in \left(9, \frac{19}{2}\right) \cup \left(\frac{19}{2}, \frac{39}{4}\right)$.

Пример 6. Решить неравенство

$$\log_{3-x}(x^2 - 10x + 25) - 2\log_{3-x}(4x - x^2 + 5) + 2 \leq 0.$$

Решение. Найдем область определения неравенства, для чего решим следующую систему:

$$\begin{cases} 3 - x > 0, \\ 3 - x \neq 1, \\ x^2 - 10x + 25 > 0, \\ 4x - x^2 + 5 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x \neq 2, \\ (x-5)^2 > 0, \\ (x+1)(5-x) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x \neq 2, \\ x \neq 5, \\ -1 < x < 5; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-1, 2) \cup (2, 3).$$

На области определения преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$\log_{3-x}(x^2 - 10x + 25) - 2\log_{3-x}(4x - x^2 + 5) + 2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{3-x}(x - 5)^2 - 2\log_{3-x}((x + 1)(5 - x)) + 2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\log_{3-x}|x - 5| + 2 \leq 2\log_{3-x}((x + 1)(5 - x)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{3-x}(5 - x) + 1 \leq \log_{3-x}(x + 1) + \log_{3-x}(5 - x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{3-x}(x+1) \geq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3 - x < 1, \\ x + 1 \leq 3 - x, \end{cases} \\ \begin{cases} 3 - x > 1, \\ x + 1 \geq 3 - x; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 2, \\ x \leq 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2, \\ x \geq 1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in [1, 2).$$

Все полученные значения x содержатся в области определения неравенства.

Ответ: $x \in [1, 2)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Решить неравенство $\log_{-2-x}(-3-2x) \geq \log_{-2-x}\left(-\frac{3x}{2}\right)$.

2. Решить неравенство $\log_x \frac{10x+2}{25(1-x)} > 0$.

3. Решить неравенство $\log_x(20x + 3x^2 - x^3) \geq 3$.

4. Решить неравенство $\log_{x-1} \frac{x^2 - x - 6}{2x - 8} \leq 1$.

5. Решить неравенство $\log_{\frac{2x+2}{5x-1}}(10x^2 + x - 2) \leq 0$.

6. Решить неравенство $\log_3\sqrt{5-2x} \cdot \log_x 3 < 1$.

7. Решить неравенство $\dfrac{\log_3\left(1 - \frac{3}{2}x\right)}{\log_9 2x} \geq 1$.

8. Решить неравенство $\log_{\sqrt{1-x}}(1+5x) \geq -2$.

9. Решить неравенство $\dfrac{\log_{5x-7}(x+12)}{\log_{5x-7}x^2} < 1$.

10. Решить неравенство $\dfrac{\log_{7^x+9}21}{\log_{7^x+9}(x^2-16)} \geq \dfrac{\log_2(x^2+10x+21)}{\log_2(x^2-16)}$.

11. Решить неравенство $\left(1 - \frac{x}{2}\right)\log_{13-3\cdot 2^x}4 \leq 1$.

12. Решить неравенство $\log_{\frac{x-2}{2x-10}} \frac{x+2}{4} \leq 1$.

13. Решить неравенство $\log_{x-3}(5-x) \leq \log_{x-3}|4x - 14|$.

14. Решить неравенство $\log_{(x+3)^2}(2x^2 + 9x + 21) \geq \log_{(x+3)^2}(x^2 - x)$.

15. Решить неравенство $(x^2 - x + 1)^{x^2-2{,}5x+1} < 1$.

16. Решить неравенство $(6x^2 + 2x + 1)^{2x^2-x} \geq 1$.

17. Решить неравенство $\log_{\frac{x^2-18x+91}{90}}\left(5x - \frac{3}{10}\right) \leq 0$.

18. Решить неравенство $(\log_{|x+2|}4) \cdot (\log_4(x^2 + x - 2)) \leq 1$.

4.5. ПЕРЕХОД К НОВОМУ ОСНОВАНИЮ

Одним из важных методов при решении логарифмических уравнений и неравенств является метод перехода к новому основанию. В качестве такого основания берется, как правило, число, наиболее подходящее для дальнейших преобразований логарифмов. Формула перехода к новому основанию приведена в начале данной главы. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти сумму корней уравнения

$$\log_2 x + \log_3 x = \log_2 x \cdot \log_3 x.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение, воспользовавшись формулой перехода к новому основанию. Имеем:

$$\log_2 x + \log_3 x = \log_2 x \cdot \log_3 x \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 3} = \log_2 x \cdot \log_3 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x + \log_2 x \cdot \log_3 2 = \log_2 x \cdot \log_3 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x(1 + \log_3 2 - \log_3 x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x(\log_3 6 - \log_3 x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = 0, \\ \log_3 x = \log_3 6;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1, \\ x = 6.\end{array}\right.$$

Таким образом, корнями уравнения являются числа $x = 1$ и $x = 6$ и сумма этих корней равна 7.

Ответ: 7.

Пример 2. Решить неравенство

$$\log_2(5-x)\cdot\log_{x+1}\frac{1}{8}\ge -6.$$

Решение. Преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$\log_2(5-x)\cdot\log_{x+1}\frac{1}{8}\ge -6 \Leftrightarrow \log_2(5-x)\cdot\frac{\log_2\frac{1}{8}}{\log_2(x+1)}\ge -6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(5-x)\cdot\frac{-3}{\log_2(x+1)}\ge -6 \Leftrightarrow \frac{\log_2(5-x)}{\log_2(x+1)}\le 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{x+1}(5-x)\le 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x+1<1,\\ 5-x\ge(x+1)^2,\end{cases}\\ \begin{cases}x+1>1,\\ 0<5-x\le(x+1)^2;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1<x<0,\\ x^2+3x-4\le 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x>0,\\ x<5,\\ x^2+3x-4\ge 0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1<x<0,\\ -4\le x\le 1,\end{cases}\\ \begin{cases}0<x<5,\\ x\in(-\infty,-4]\cup[1,+\infty);\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-1,0)\cup[1,5).$$

Ответ: $x\in(-1,\ 0)\cup[1,\ 5)$.

Пример 3. Решить неравенство

$$7\log_3(x+2)^8<8\log_2(1-x)^7\cdot\log_3 2.$$

Решение. Преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$7\log_3(x+2)^8<8\log_2(1-x)^7\cdot\log_3 2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 56\log_3|x+2|<\frac{56\log_3(1-x)}{\log_3 2}\cdot\log_3 2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3|x+2|<\log_3(1-x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|x+2|>0,\\ |x+2|<1-x;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne -2,\\ x+2<1-x,\\ x+2>x-1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne -2,\\ x<-\dfrac{1}{2};\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup \left(-2, -\frac{1}{2}\right).$$

Ответ: $x \in (-\infty, -2) \cup \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$.

Пример 4. Решить уравнение

$$\log_{2x+3}(x-2)^2 = \log_{\frac{x}{6}+\frac{1}{2}}(x-2)^2.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение, воспользовавшись формулой перехода к новому основанию. Имеем:

$$\log_{2x+3}(x-2)^2 = \log_{\frac{x}{6}+\frac{1}{2}}(x-2)^2 \Leftrightarrow \frac{\lg(x-2)^2}{\lg(2x+3)} = \frac{\lg(x-2)^2}{\lg\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{2}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg(x-2)^2\left(\frac{1}{\lg(2x+3)} - \frac{1}{\lg\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{2}\right)}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg(x-2)^2\left(\lg\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{2}\right) - \lg(2x+3)\right)}{\lg(2x+3)\cdot\lg\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{2}\right)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \lg(x-2)^2 = 0, \\ \lg\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{2}\right) = \lg(2x+3), \end{array}\right. \\ 2x+3 > 0, \neq 1, \\ \frac{x}{6}+\frac{1}{2} > 0, \neq 1, \\ x-2 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 3, \\ x = -\frac{15}{11}, \end{array}\right. \\ 2x+3 > 0, \neq 1, \\ \frac{x}{6}+\frac{1}{2} > 0, \neq 1, \\ x \neq 2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{или} \quad x = -\frac{15}{11}.$$

Ответ: $x = 1$, $x = -\frac{15}{11}$.

Пример 5. Решить неравенство

$$\log_{\frac{4}{x}} 2 \geq \log_2 \frac{x}{8} - 1.$$

Решение. Преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$\log_{\frac{4}{x}} 2 \geq \log_2 \frac{x}{8} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 \frac{4}{x}} \geq \log_2 \frac{x}{8} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2 - \log_2 x} \geq \log_2 x - 4.$$

Пусть $\log_2 x = y$. Имеем:

$$\frac{1}{2-y} \geq y - 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2-y} - y + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-(2-y)(y-4)}{2-y} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2 - 6y + 9}{2-y} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(y-3)^2}{2-y} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y < 2, \\ y = 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x < 2, \\ \log_2 x = 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 4, \\ x = 8; \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (0, 4) \cup \{8\}.$$

Ответ: $x \in (0,4) \cup \{8\}$.

Пример 6. Решить неравенство

$$\log_{4x^2} x^2 \cdot \log_{8x^4} x^4 \leq 1.$$

Решение. Преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$\log_{4x^2} x^2 \cdot \log_{8x^4} x^4 \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\log_2 x^2}{\log_2 4x^2} \cdot \frac{\log_2 x^4}{\log_2 8x^4} \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\log_2|x|}{2 + 2\log_2|x|} \cdot \frac{4\log_2|x|}{3 + 4\log_2|x|} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{4\log_2^2|x|}{(1 + \log_2|x|)(3 + 4\log_2|x|)} \leq 1.$$

Пусть $\log_2|x| = y$. Имеем:

$$\frac{4y^2}{(1+y)(3+4y)} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{4y^2 - (1+y)(3+4y)}{(1+y)(3+4y)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7y+3}{(1+y)(3+4y)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftarrow \left[\begin{array}{l} -1 < y < -\frac{3}{4}, \\ y \geq -\frac{3}{7}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < \log_2|x| < -\frac{3}{4}, \\ \log_2|x| \geq -\frac{3}{7}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} < |x| < 2^{-\frac{3}{4}}, \\ |x| \geq 2^{-\frac{3}{7}}; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -2^{-\frac{3}{7}}\right] \cup \left(-2^{-\frac{3}{4}}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 2^{-\frac{3}{4}}\right) \cup \left[2^{-\frac{3}{7}}, +\infty\right).$$

Ответ: $x \in \left(-\infty, -2^{-\frac{3}{7}}\right] \cup \left(-2^{-\frac{3}{4}}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 2^{-\frac{3}{4}}\right) \cup \left[2^{-\frac{3}{7}}, +\infty\right)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Решить уравнение $\log_2(x + 4) = \log_{4x+16}8$.

2. Найти сумму корней уравнения $\log_7 x = 5 - \log_{3x}49$.

3. Решить уравнение $\log_x 2 \cdot \log_{2x}2 = \log_{4x}2$.

4. Решить уравнение $\log_{x+6}(x^3 + 10x^2 + 15x) \cdot \log_2(x + 6) = \log_2(3x^2 + 5x)$.

5. Найти область определения функции $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{4}{x}} \frac{1}{2} - \log_2(2x) \cdot \log_{\frac{8}{x}} \frac{1}{2}}$.

6. Решить неравенство $\dfrac{\log_{\sqrt{2}}(4^{x+1} - 2^{x+3} + 4)}{\log_{2^x-1} 2} < 80$.

7. Решить неравенство $\log_{0,25}(19 - 9x) \cdot \log_{3-x}0,5 \ge 1$.

8. Решить неравенство $\dfrac{\log_x 2x^{-1} \cdot \log_x 2x^2}{\log_{2x} x \cdot \log_{2x^{-2}} x} < 40$.

9. Решить неравенство $x \ge \log_2(101 \cdot 10^x - 10^{2+2x}) - \log_5(101 \times 2^x - 5^{2+x} \cdot 2^{2+2x})$.

10. Решить неравенство $\log_{\frac{3}{4}}\left(\dfrac{x}{x-1}\right) + \log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{x-1}{4x}\right) \ge 2$.

11. Решить неравенство $\dfrac{\log_4(2-x) - \log_6(2-x)}{\log_6 x - \log_9 x} \le \log_4 9$.

ГЛАВА 5. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА СМЕШАННОГО ТИПА

В данной главе мы рассмотрим, как решаются уравнения и неравенства смешанного типа, то есть содержащие, например, модуль и логарифм, или показательную функцию и знак радикала. При решении такой задачи необходимо определиться с первоначальным действием, то есть сначала раскрываем модуль, избавляемся от логарифма, и т.д. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить уравнение

$$4\sqrt{x+1} = |2x-1| + 3.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей совокупности:

$$4\sqrt{x+1} = |2x-1| + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-1 \ge 0, \\ 4\sqrt{x+1} = (2x-1)+3, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-1 < 0, \\ 4\sqrt{x+1} = (1-2x)+3; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2}, \\ 2\sqrt{x+1} = x+1, \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{1}{2}, \\ 2\sqrt{x+1} = 2-x; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2}, \\ x+1 \ge 0, \\ 4(x+1) = (x+1)^2, \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{1}{2}, \\ 2-x \ge 0, \\ 4(x+1) = (2-x)^2; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2}, \\ x \ge -1, \\ x^2-2x-3 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{1}{2}, \\ x \le 2, \\ x^2-8x = 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 0$, $x = 3$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\sqrt{2\cdot 3^{2x+1}-\frac{5}{2}\cdot 3^x} > 3^{x+1}-1.$$

Решение. Пусть $y = 3^x$, $y > 0$. Тогда неравенство примет следующий вид:

$$\sqrt{6y^2-\frac{5y}{2}} > 3y-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3y-1<0,\\ 6y^2-\dfrac{5y}{2}\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}3y-1\ge 0,\\ 6y^2-\dfrac{5y}{2}>(3y-1)^2;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y<\dfrac{1}{3},\\ y\left(y-\dfrac{5}{12}\right)\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}y\ge\dfrac{1}{3},\\ 6y^2-7y+2<0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y<\dfrac{1}{3},\\ y\in(-\infty,0]\cup\left[\dfrac{5}{12},+\infty\right),\end{cases}\\ \begin{cases}y\ge\dfrac{1}{3},\\ \dfrac{1}{2}<y<\dfrac{2}{3};\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y\le 0,\\ \dfrac{1}{2}<y<\dfrac{2}{3};\end{array}\right. \overset{(\text{т.к. } y>0)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}<y<\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}<3^x<\frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(\log_3\frac{1}{2},\log_3\frac{2}{3}\right).$$

Ответ: $x\in\left(\log_3\dfrac{1}{2},\log_3\dfrac{2}{3}\right)$.

Пример 3. Решить уравнение

$$3^{2x}-2\cdot 3^{x-1}+\left|3^x-\frac{1}{4}\right|=\frac{13}{12}.$$

Решение. Пусть $y = 3^x$, $y > 0$. Тогда данное уравнение примет следующий вид:

$$y^2-\frac{2y}{3}+\left|y-\frac{1}{4}\right|=\frac{13}{12}\Leftrightarrow|12y-3|=13+8y-12y^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y<\frac{1}{4},\\3-12y=13+8y-12y^2,\end{cases}\\\begin{cases}y\ge\frac{1}{4},\\12y-3=13+8y-12y^2;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y<\frac{1}{4},\\6y^2-10y-5=0,\end{cases}\\\begin{cases}y\ge\frac{1}{4},\\3y^2+y-4=0;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y<\frac{1}{4},\\y=\frac{5\pm\sqrt{55}}{6},\end{cases}\\\begin{cases}y\ge\frac{1}{4},\\\left[\begin{array}{l}y=1,\\y=-\frac{4}{3};\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\frac{5-\sqrt{55}}{6},\\y=1;\end{array}\right.\overset{(\text{т.к.}\,y>0)}{\Leftrightarrow}\quad y=1\Leftrightarrow x=0.$$

Ответ: $x=0$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\sqrt{1-\log_5(x^2-2x+2)}<\log_5(5x^2-10x+10).$$

Решение. Пусть $y=\log_5(x^2-2x+2)$, тогда:

$$\sqrt{1-y}<1+y\Leftrightarrow\begin{cases}1-y\ge0,\\1+y\ge0,\\1-y<(1+y)^2;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\le1,\\y\ge-1,\\y^2+3y>0;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y\le1,\\y\ge-1,\\y\in(-\infty,-3)\cup(0,+\infty);\end{cases}\Leftrightarrow y\in(0,1]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0<\log_5(x^2-2x+2)\le1\Leftrightarrow1<x^2-2x+2\le5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+1>0,\\x^2-2x-3\le0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne1,\\-1\le x\le3;\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-1,1)\cup(1,3].$$

Ответ: $x\in[-1,\ 1)\cup(1,\ 3]$.

Пример 5. Решить уравнение

$$\sqrt{\log_x \sqrt{2x}} \cdot \log_4 x = -1.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\sqrt{\log_x \sqrt{2x}} \cdot \log_4 x = -1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\log_2 \sqrt{2x}}{\log_2 x}} \cdot \frac{\log_2 x}{2} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1+\log_2 x}{2\log_2 x}} \cdot \frac{\log_2 x}{2} = -1.$$

Пусть $\log_2 x = y$. Имеем:

$$\sqrt{\frac{1+y}{2y}} \cdot \frac{y}{2} = -1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1+y}{2y}} = -\frac{2}{y} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{2}{y} \geq 0, \\ \dfrac{1+y}{2y} = \dfrac{4}{y^2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y < 0, \\ y^2 + y - 8 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{-1-\sqrt{33}}{2} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{-1-\sqrt{33}}{2}}.$$

Ответ: $x = 2^{\frac{-1-\sqrt{33}}{2}}$.

Пример 6. Решить неравенство

$$\sqrt{8 \cdot 16^x - \frac{1}{2} \cdot 9^x} \leq 3 \cdot 4^x - 3^x.$$

Решение. Разделим обе части неравенства на 3^x, что возможно, так как это выражение положительно при всех значениях переменной x. Имеем:

$$\sqrt{8 \cdot \left(\frac{16}{9}\right)^x - \frac{1}{2}} \leq 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x - 1.$$

Пусть $y = \left(\dfrac{4}{3}\right)^x$, $y > 0$. Тогда полученное неравенство примет следующий вид:

$$\sqrt{8y^2-\frac{1}{2}}\le 3y-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 8y^2-\frac{1}{2}\ge 0, \\ 3y-1\ge 0, \\ 8y^2-\frac{1}{2}\le (3y-1)^2; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2\ge \frac{1}{16}, \\ y\ge \frac{1}{3}, \\ 2y^2-12y+3\ge 0; \end{cases} \overset{(\text{т.к.}y>0)}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{(\text{т.к.}y>0)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y\ge \frac{1}{4}, \\ y\ge \frac{1}{3}, \\ y\in\left(0;3-\frac{\sqrt{30}}{2}\right]\cup\left[3+\frac{\sqrt{30}}{2},+\infty\right); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y\in\left[3+\frac{\sqrt{30}}{2},+\infty\right) \Leftrightarrow x\in\left[\log_{\frac{4}{3}}\left(3+\frac{\sqrt{30}}{2}\right),+\infty\right).$$

О т в е т: $x\in\left[\log_{\frac{4}{3}}\left(3+\frac{\sqrt{30}}{2}\right),+\infty\right).$

Пример 7. Решить неравенство

$$\frac{21-2^x-2^{6-x}-|3-2^x|}{5-|3-2^x|}\ge 1.$$

Решение. Пусть $y=2^x$, $y>0$. Тогда данное неравенство примет следующий вид:

$$\frac{21-y-\frac{64}{y}-|3-y|}{5-|3-y|}\ge 1 \Leftrightarrow \frac{16-y-\frac{64}{y}}{5-|3-y|}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{16y-y^2-64}{5-|3-y|}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{(y-8)^2}{5-|3-y|}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 8, \\ 5 - |3 - y| \neq 0, \end{cases} \\ 5 - |3 - y| < 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow 5 - |3 - y| < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |3 - y| > 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 - y > 5, \\ 3 - y < -5; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y < -2, \\ y > 8; \end{array}\right. \overset{(\text{т.к. } y>0)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow y > 8 \Leftrightarrow 2^x > 8 \Leftrightarrow x \in (3, +\infty).$$

Ответ: $x \in (3, +\infty)$.

Пример 8. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{4}}(\sqrt{x+3} - x + 3) \geq -2 + \log_{\frac{1}{4}}\frac{3}{8}.$$

Решение. Пусть $\sqrt{x+3} = y$, $y \geq 0$. Тогда $x = y^2 - 3$, и исходное неравенство примет следующий вид:

$$\log_{\frac{1}{4}}(y - (y^2 - 3) + 3) \geq -2 + \log_{\frac{1}{4}}\frac{3}{8} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}(6 + y - y^2) \geq \log_{\frac{1}{4}}6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 + y - y^2 > 0, \\ 6 + y - y^2 \leq 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 + y - y^2 > 0, \\ y - y^2 \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < y < 3, \\ y \in (-\infty; 0] \cup [1, +\infty); \end{cases} \Leftrightarrow y \in (-2, 0] \cup [1, 3) \Leftrightarrow$$

$$\overset{\text{т.к. } y \geq 0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} y = 0, \\ 1 \leq y < 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+3} = 0, \\ 1 \leq \sqrt{x+3} < 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ 1 \leq x + 3 < 9; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ -2 \leq x < 6; \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \{-3\} \cup [-2, 6).$$

Ответ: $x \in \{-3\} \cup [-2, 6)$.

Пример 9. Решить уравнение

$$2\sqrt{\log_4^2(x-2)} = 3 - \log_2(2x+1).$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$2\sqrt{\log_4^2(x-2)} = 3 - \log_2(2x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left|\log_4(x-2)\right| = 3 - \log_2(2x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\log_2(x-2)\right| = 3 - \log_2(2x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2(x-2) \geq 0, \\ \log_2(x-2) = 3 - \log_2(2x+1), \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2(x-2) < 0, \\ -\log_2(x-2) = 3 - \log_2(2x+1). \end{cases} \end{array}\right.$$

Решением неравенства $\log_2(x - 2) \geq 0$ является $x \geq 3$. Ясно, что все эти значения x входят в область определения исходного уравнения. Решим уравнение первой системы. Имеем:

$$\log_2(x - 2) = 3 - \log_2(2x + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x - 2) + \log_2(2x + 1) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\log_2(x - 2)(2x + 1) = 3 \Leftrightarrow (x - 2)(2x + 1) = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 10 = 0.$$

Корень этого уравнения, удовлетворяющий неравенству $x \geq$ ≥ 3, есть $x = \dfrac{3+\sqrt{89}}{4}$. Решением неравенства $\log_2(x - 2) < 0$ является промежуток $x \in (2, 3]$, который также содержится целиком в области определения исходного уравнения. Решим уравнение второй системы. Имеем:

$$-\log_2(x - 2) = 3 - \log_2(2x + 1) \Leftrightarrow \log_2(2x + 1) =$$

$$= 3 + \log_2(x - 2) \Leftrightarrow \log_2(2x + 1) = \log_2 8(x - 2) \Leftrightarrow 2x + 1 =$$

$$= 8(x - 2) \Leftrightarrow x = \frac{17}{6},$$

что входит в промежуток $x \in (2, 3]$. Таким образом, решением исходного уравнения являются $x = \dfrac{3+\sqrt{89}}{4}$ и $x = \dfrac{17}{6}$.

Ответ: $x = \dfrac{3+\sqrt{89}}{4}$, $x = \dfrac{17}{6}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Решить уравнение $3\sqrt{x+4} = 5 - 2|x + 2|$.

2. Решить неравенство $\sqrt{9^x + 12^x - 2^{4x+1}} > \sqrt{3 \cdot 4^{2x+1} + 12^x - 9^x}$.

3. Решить уравнение $4 + \sqrt{x+9} = |x+5|$.

4. Решить неравенство $\sqrt{7 + 2^{1-x}} \geq 7 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$.

5. Решить уравнение $2^{2x+1} - 15 \cdot 2^x + 10 = 6|2^{x-1} - 1|$.

6. Решить неравенство $5^{2x-10-3\sqrt{x-2}} - 4 \cdot 5^{x-5} < 5^{1+3\sqrt{x-2}}$.

7. Решить уравнение $\log_3(\sqrt{12+x} - 2) = \frac{1}{2}\log_3(x+2)$.

8. Решить неравенство $\sqrt{\log_9(3x^2 - 4x + 2)} + 1 > \log_3(3x^2 - 4x + 2)$.

9. Решить уравнение $\sqrt{\log_x\sqrt{3x}} \cdot \log_3 x = -1$.

10. Решить неравенство $\sqrt{\log_5(x+2)} > \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{5}{x+2}\right)$.

11. Решить неравенство $\sqrt{7 - \log_2 x^2} + \log_2 x^4 > 4$.

12. Решить уравнение $|3\log_x x^4 + 7\log_7 2 \cdot \log_2 x^2| = -\log_x 49$.

13. Решить неравенство $(\log_2 x)\sqrt{\log_x\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)} \leq 1$.

14. Решить уравнение $|1 - \log_{2x}(x^2 - 5x + 6)| = 1 - \log_{2x}(x^2 - 5x + 6)$.

15. Решить неравенство $\log_{2x-3}\left(\sqrt{x+2}+x-3\right) \le 1$.

16. Решить уравнение $\log_x(3x-2) - 2 =$
$$= \sqrt{\log_x^2(3x-2) + 4\log_x\left(\frac{x}{3x-2}\right)}.$$

17. Решить неравенство $2 < \left|\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) - 4\right| \le 3$.

ГЛАВА 6. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ

Логарифмический метод интервалов применяется для решения неравенств, в которых мы можем заменить выражение, содержащее логарифмы, на более простое выражение, имеющее при всех допустимых x тот же знак, что и исходное. Метод состоит в следующем. Сначала мы находим область определения неравенства. Затем на этой области определения заменяем выражение $\log_a f(x)$ на выражение $(f(x) - 1)$ (при $a > 1$), выражение $\log_{f(x)} g(x)$ можно заменить на выражение $(f(x) - 1)(g(x) - 1)$, а разность логарифмов $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ на разность $f(x) - g(x)$ (при $a > 1$). Разность логарифмов $\log_{h(x)} f(x) - \log_{h(x)} g(x)$ можно заменить на выражение $(h(x) - 1)(f(x) - g(x))$. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{1}{\log_5(x^2-5x+6)} < \log_{20}5.$$

Решение. Найдем те значения переменной x, при которых число, стоящее под знаком логарифма, положительно. Имеем:

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty).$$

На этом множестве преобразуем данное неравенство следующим образом:

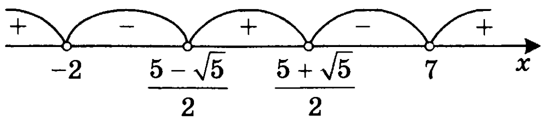
$$\frac{1}{\log_5(x^2-5x+6)} < \log_{20}5 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_5(x^2-5x+6)} < \frac{1}{\log_5 20} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_5 20} - \frac{1}{\log_5(x^2-5x+6)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_5(x^2-5x+6) - \log_5 20}{\log_5 20 \cdot \log_5(x^2-5x+6)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6-20}{x^2-5x+6-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x-14}{x^2-5x+5} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-7)}{\left(x-\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)} > 0 \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow x \in (-\infty,-2) \cup \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) \cup (7,+\infty).$$

С учетом области определения получаем окончательный ответ:

$$x \in (-\infty,-2) \cup \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, 2\right) \cup \left(3, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) \cup (7,+\infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty,-2) \cup \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, 2\right) \cup \left(3, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) \cup (7,+\infty).$

Пример 2. Решить неравенство

$$\log_{x^2}\left(x+\frac{1}{3}\right) \le \log_{2x+3}\left(x+\frac{1}{3}\right).$$

Решение. Найдем те значения переменной x, при которых основания логарифмов, а также числа, стоящие под знаком логарифмов, положительны. Имеем:

$$\begin{cases} x^2 > 0, \\ 2x+3 > 0, \\ x+\frac{1}{3} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 0, \\ x > -\frac{3}{2}, \\ x > -\frac{1}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup (0,+\infty).$$

Заметим также, что $x = \frac{2}{3}$ является решением задачи.

На множестве $x \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$\log_{x^2}\left(x+\frac{1}{3}\right) \le \log_{2x+3}\left(x+\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{\log_{x+\frac{1}{3}} x^2} \le \frac{1}{\log_{x+\frac{1}{3}}(2x+3)} \Leftrightarrow$$

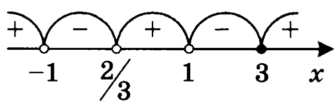
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_{x+\frac{1}{3}}(2x+3)} - \frac{1}{\log_{x+\frac{1}{3}} x^2} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_{x+\frac{1}{3}} x^2 - \log_{x+\frac{1}{3}}(2x+3)}{\log_{x+\frac{1}{3}} x^2 \cdot \log_{x+\frac{1}{3}}(2x+3)} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x+\frac{1}{3}-1\right)(x^2-2x-3)}{\left(x+\frac{1}{3}-1\right)^2 (x^2-1)(2x+3-1)} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x-3}{(3x-2)(x^2-1)(x+1)} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{(3x-2)(x-1)(x+1)} \ge 0 \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup [3, +\infty).$$

Учитывая область определения, а также добавляя точку $x = \frac{2}{3}$, получаем окончательный ответ: $x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right) \cup [3, +\infty)$.

Ответ: $x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right) \cup [3, +\infty)$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\log_{2-5x} 3 + \frac{1}{\log_2(2-5x)} \le \frac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)}.$$

Решение. Найдем те значения переменной x, при которых основания логарифмов, а также числа, стоящие под знаком логарифмов, положительны. Имеем:

$$\begin{cases} 2-5x>0, \\ 6x^2-6x+1>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\dfrac{2}{5}, \\ x\in\left(-\infty, \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\right)\cup\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}, +\infty\right); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right).$$

На этом множестве преобразуем данное неравенство ледующим образом:

$$\log_{2-5x}3+\frac{1}{\log_2(2-5x)}\le\frac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{2-5x}3+\log_{2-5x}2\le\frac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{2-5x}6\le\frac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)}\Leftrightarrow$$

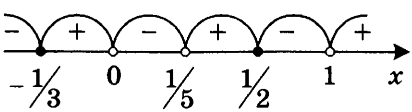
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_6(2-5x)}\le\frac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_6(2-5x)}-\frac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_6(6x^2-6x+1)-\log_6(2-5x)}{\log_6(2-5x)\cdot\log_6(6x^2-6x+1)}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x^2-6x+1-(2-5x)}{(2-5x-1)(6x^2-6x+1-1)}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x^2-x-1}{(1-5x)(6x^2-6x)}\le 0\Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \frac{(3x+1)(2x-1)}{x(5x-1)(x-1)}\ge 0\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{1}{3}, 0\right)\cup\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right]\cup(1, +\infty).$$

С учетом области определения получаем окончательный ответ: $x \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right) \cup \left(\frac{1}{5}, \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right]$.

О т в е т: $x \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right) \cup \left(\frac{1}{5}, \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right]$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\log_{5-4x-x^2}(5-9x-2x^2) \le \log_{1-x}(1-2x).$$

Решение. Найдем те значения переменной x, при которых основания логарифмов, а также числа, стоящие под знаком логарифмов, положительны. Имеем:

$$\begin{cases} 5-4x-x^2>0, \\ 5-9x-2x^2>0, \\ 1-x>0, \\ 1-2x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5<x<1, \\ -5<x<\frac{1}{2}, \\ x<1, x<\frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-5, \frac{1}{2}\right).$$

На полученном интервале преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$\log_{5-4x-x^2}(5-9x-2x^2) \le \log_{1-x}(1-2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{(5+x)(1-x)}((5+x)(1-2x)) \le \log_{1-x}(1-2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_{1-x}((5+x)(1-2x))}{\log_{1-x}((5+x)(1-x))} \le \log_{1-x}(1-2x) \Leftrightarrow$$

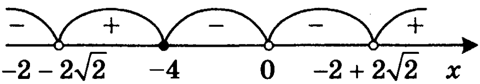
$$\Leftrightarrow \frac{\log_{1-x}(5+x)+\log_{1-x}(1-2x)}{\log_{1-x}(5+x)+1} \le \log_{1-x}(1-2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-\log_{1-x}(1-2x))\log_{1-x}(5+x)}{\log_{1-x}(5+x)+1} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\log_{1-x}(1-x)-\log_{1-x}(1-2x))\log_{1-x}(5+x)}{\log_{1-x}((5+x)(1-x))} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-x-1)^2(1-x-(1-2x))(5+x-1)}{(1-x-1)((5+x)(1-x)-1)} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2(x+4)}{x^2+4x-4} \le 0, \\ x \ne 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2(x+4)}{(x+2-2\sqrt{2})(x+2+2\sqrt{2})} \le 0, \\ x \ne 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2-2\sqrt{2}) \cup [-4, 0) \cup (0, -2+2\sqrt{2}).$$

С учетом области определения получаем окончательный ответ:

$$x \in (-5, -2-2\sqrt{2}) \cup [-4, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Ответ: $x \in (-5, -2-2\sqrt{2}) \cup [-4, 0) \cup \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Решить неравенство $\dfrac{\log_8 x}{\log_2(1+2x)} \le \dfrac{\log_2 31 + 2x}{\log_2 x}$.

2. Решить неравенство
$$\frac{\log_5(x^2-4x-11)^2 - \log_{11}(x^2-4x-11)^3}{2-5x-3x^2} \ge 0.$$

3. Решить неравенство $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{12}}(2x^2-1)} > \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{4}} x} + \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}} x}$.

4. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{1-x^2}} 2 < \log_{2x^2} \dfrac{1}{2}$.

ГЛАВА 7. СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Одним из основных методов решения систем ал-гебраи-ческих уравнений является *метод подстановки.* Он заключается в том, что из одного уравнения мы можем вы-разить какую-либо переменную и подставить в другое урав-не-ние. При решении системы уравнения можно умно-жать на отличное от нуля число, а также складывать друг с другом. Для того, чтобы решить систему неравенств, необхо-димо решить каждое неравенство по отдельности, а за-тем сравнить полученные результаты. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 - 7x - 12y + 1 = 0, \\ x - y = -1. \end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения, выразив x через y, получаем $x = y - 1$; подставим это значение в первое уравнение. Тогда данная система примет вид:

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 - 7x - 12y + 1 = 0, \\ x - y = -1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 - 7x - 12y + 1 = 0, \\ x = y - 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(y-1)^2 - y(y-1) + 3y^2 - 7(y-1) - 12y + 1 = 0, \\ x = y - 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 - 11y + 5 = 0, \\ x = y - 1. \end{cases}$$

Решая первое уравнение этой системы, найдем $y_1 = 5$ и $y_2 = \frac{1}{2}$. Подставляя найденные значения y во второе уравнения, найдем $x_1 = 4$ и $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $\left\{(4, 5); \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21, \\ y^2 - 2xy = -15. \end{cases}$$

Решение. Умножив первое уравнение системы на 5, а второе на 7 и сложив полученные уравнения, получим следующее уравнение: $5x^2 - 19xy + 12y^2 = 0$. Тогда исходная система равносильна системе:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21, \\ y^2 - 2xy = -15; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 19xy + 12y^2 = 0, \\ y^2 - 2xy = -15; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3y)(5x - 4y) = 0, \\ y^2 - 2xy = -15; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3y, \\ y^2 - 2xy = -15, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{4y}{5}, \\ y^2 - 2xy = -15; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3y, \\ y^2 = 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{4y}{5}, \\ y^2 = 25; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{(x, y)\} = \{(3\sqrt{3}, \sqrt{3}); (-3\sqrt{3}, -\sqrt{3}); (4, 5); (-4, -5)\}.$$

Ответ: $\{(4, 5); (-4, -5); (3\sqrt{3}, \sqrt{3}); (-3\sqrt{3}, -\sqrt{3})\}$.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + x - 2y = 1 \\ x^2 + 2,5y^2 + 3x - 4y = 4. \end{cases}$$

Решение. Вычтем из второго уравнения системы первое уравнение, умноженное на $\dfrac{5}{2}$, оставив без изменения первое уравнение. Имеем:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + x - 2y = 1,5 \\ x^2 + 2,5y^2 + 3x - 4y = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 2,5y^2 + 2,5x - 5y = 2,5; \\ 5x^2 + 2,5y^2 + 3x - 4y = 4; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + y^2 + x - 2y = 1, \\ 0,5x + y = 1,5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + y^2 + x - 2y = 1, \\ x = 3 - 2y; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2(3-2y)^2 + y^2 + (3-2y) - 2y = 1, \\ x = 3-2y; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9y^2 - 28y + 20 = 0, \\ x = 3-2y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 2, \\ y = \dfrac{10}{9}, \end{array}\right. \\ x = 3-2y; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x = -1,\ y = 2 \quad \text{или} \quad x = \frac{7}{9},\ y = \frac{10}{9}.$$

Ответ: $\left\{(-1, 2); \left(\dfrac{7}{9}, \dfrac{10}{9}\right)\right\}$.

Пример 4. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2xy + y^2 - 4x - 3y + 2 = 0, \\ xy + 3y^2 - 2x - 14y + 16 = 0. \end{cases}$$

Решение. Вычтем из второго уравнения системы, умноженного на 2, первое уравнение, оставив без изменения первое уравнение. Имеем:

$$\begin{cases} 2xy + y^2 - 4x - 3y + 2 = 0, \\ xy + 3y^2 - 2x - 14y + 16 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy + y^2 - 4x - 3y + 2 = 0, \\ 2xy + 6y^2 - 4x - 28y + 32 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy + y^2 - 4x - 3y + 2 = 0, \\ 5y^2 - 25y + 30 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy + y^2 - 4x - 3y + 2 = 0, \\ y^2 - 5y + 6 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy + y^2 - 4x - 3y + 2 = 0, \\ \left[\begin{array}{l} y = 2, \\ y = 3; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2, \\ \begin{cases} x = -1, \\ y = 3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\{(-1, 3); (t, 2)\}$, $t \in R$.

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3|x+1| + 2|y-2| = 20, \\ x + 2y = 4. \end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения выразим x через y и подставим в первое уравнение системы:

$$\begin{cases} 3|x+1|+2|y-2|=20, \\ x+2y=4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3|5-2y|+2|y-2|=20, \\ x=4-2y. \end{cases}$$

Решим первое уравнение, раскрывая модуль по определению. Это уравнение равносильно следующей совокупности:

$$3|5-2y|+2|y-2|=20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \le 2, \\ 3(5-2y)+2(2-y)=20, \end{cases} \\ \begin{cases} 2 < y \le \dfrac{5}{2}, \\ 3(5-2y)+2(y-2)=20, \end{cases} \\ \begin{cases} y > \dfrac{5}{2}, \\ 3(2y-5)+2(y-2)=20; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \le 2, \\ y=-\dfrac{1}{8}, \end{cases} \\ \begin{cases} 2 < y \le \dfrac{5}{2}, \\ y=-\dfrac{9}{4}, \end{cases} \\ \begin{cases} y > \dfrac{5}{2}, \\ y=\dfrac{39}{8}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad y=-\frac{1}{8} \quad \text{или} \quad y=\frac{39}{8}.$$

Если $y=-\dfrac{1}{8}$, то $x=\dfrac{17}{4}$, если $y=\dfrac{39}{8}$, то $x=-\dfrac{23}{4}$.

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{17}{4},-\dfrac{1}{8}\right);\left(-\dfrac{23}{4},\dfrac{39}{8}\right)\right\}$.

Пример 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3\sqrt{x-y}=0, \\ 2y^2+y=21+2xy. \end{cases}$$

Решение. Данная система равносильна следующей совокупности:

$$\begin{cases} x^3\sqrt{x-y}=0, \\ 2y^2+y=21+2xy; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0, \\ x-y\geq 0, \\ 2y^2+y=21, \end{cases} \\ \begin{cases} x=y, \\ 2y^2+y=21+2y^2; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0, \\ x\geq y, \\ \left[\begin{array}{l} y=3, \\ y=-\dfrac{7}{2}, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x=y, \\ y=21; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0, \\ y=-\dfrac{7}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x=21, \\ y=21. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\left(0,-\dfrac{7}{2}\right);(21,21)\right\}$.

Пример 7. Решить систему

$$\begin{cases} 4^x+5\cdot 2^x-2\cdot 3^y=2, \\ 2\cdot 9^y+2^x+2\cdot 3^y=1. \end{cases}$$

Решение. Пусть $u=2^x$, $v=3^y$; u, $v>0$. Тогда данная система примет следующий вид:

$$\begin{cases} u^2+5u-2v=2, \\ 2v^2+2v+u=1. \end{cases}$$

Умножив второе уравнение системы на 2 и вычтя первое уравнение, получим:

$$4v^2+4v+2u-u^2-5u+2v=0 \Leftrightarrow 4v^2-u+6v-3u=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2v-u)(2v+u)+3(2v-u)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2v-u)(2v+u+3)=0 \overset{(\text{т.к. } u,v>0)}{\Leftrightarrow} 2v-u=0 \Leftrightarrow u=2v.$$

Подставив вместо u в первое уравнение $2v$, получим:

$$(2v)^2+10v-2v=2 \Leftrightarrow 2v^2+4v-1=0 \overset{(\text{т.к. } v>0)}{\Leftrightarrow} v=\frac{\sqrt{6}-2}{2};$$

$\Rightarrow u = \sqrt{6} - 2$, откуда $x = \log_2(\sqrt{6} - 2), y = \log_3\left(\dfrac{\sqrt{6} - 2}{2}\right)$.

Ответ: $\left\{\left(\log_2(\sqrt{6} - 2), \log_3\left(\dfrac{\sqrt{6} - 2}{2}\right)\right)\right\}$.

Пример 8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_y x - 2\log_x y = 1, \\ x^2 + 2y^2 = 3. \end{cases}$$

Решение. Пусть $\log_y x = t$. Тогда первое уравнение системы примет следующий вид:

$$t - \frac{2}{t} = 1 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = -1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_y x = 2, \\ \log_y x = -1. \end{array}\right.$$

Если $\log_y x = 2$, т.е. $x = y^2$, то второе уравнение системы запишется следующим образом:

$$y^4 + 2y^2 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2 = 1, \\ y^2 = -3; \end{array}\right. \Leftrightarrow y = \pm 1,$$

что не входит в область определения системы. Если $\log_y x = -1$, т.е. $x = \dfrac{1}{y}$, имеем:

$$\frac{1}{y^2} + 2y^2 = 3 \Leftrightarrow 2y^4 - 3y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2 = 1, \\ y^2 = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \pm 1, \\ y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}\right.$$

Из полученных значений только $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ входит в область определения системы. Этому значению y соответствует значение $x = \sqrt{2}$.

Ответ: $\left\{\left(\sqrt{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

Пример 9. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 4^x \le 9 \cdot 2^x + 22, \\ \log_3(x^2 - x - 2) \le 1 + \log_3 \dfrac{x+1}{x-2}. \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство системы. Пусть $2^x = y$. Имеем:

$$y^2 \le 9y + 22 \Leftrightarrow (y - 11)(y + 2) \le 0 \Leftrightarrow y \le 11,$$

так как $y > 0$, откуда $x \le \log_2 11$. Перейдем к решению второго неравенства. Найдем его область определения:

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0, \\ \dfrac{x+1}{x-2} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty).$$

На области определения преобразуем неравенство следующим образом:

$$\log_3(x^2 - x - 2) \le 1 + \log_3 \frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2 - x - 2) - \log_3 \frac{x+1}{x-2} \le 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left((x^2 - x - 2) \cdot \frac{x-2}{x+1}\right) \le 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x-2)^2 \le 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 \le 3,$$

откуда $x \in [2 - \sqrt{3},\ 2 + \sqrt{3}]$. Чтобы найти решение системы, необходимо сравнить числа $\log_2 11$ и $2 + \sqrt{3}$. Сравним каждое из этих чисел с числом 3,5. Очевидно, что $2 + \sqrt{3} > 3{,}5$. Проведем второе сравнение. Имеем:

$$\log_2 11 \vee \frac{7}{2} \Leftrightarrow \log_2 11 \vee \log_2 2^{\frac{7}{2}} \Leftrightarrow 11 \vee 2^{\frac{7}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 11^2 \vee 2^7 \Leftrightarrow 121 \vee 128.$$

Так как $121 < 128$, то $\log_2 11 < \frac{7}{2}$, откуда следует, что $\log_2 11 < 2 + \sqrt{3}$. Таким образом, с учетом области определения решением системы будет служить промежуток $x \in (2, \log_2 11]$.

Ответ: $x \in (2, \log_2 11]$.

Пример 10. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{11-x}(x+7)\cdot\log_{x+5}(9-x) \le 0, \\ 64^{x^2-3x+20} - 0{,}125^{2x^2-6x-200} \le 0. \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство методом интервалов. Найдем его область определения:

$$\begin{cases} 11-x > 0, \\ 11-x \ne 1, \\ x+7 > 0, \\ x+5 > 0, \\ x+5 \ne 1, \\ 9-x > 0; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-5,-4) \cup (-4,9).$$

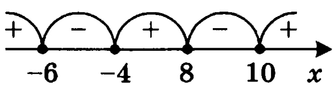
На области определения преобразуем неравенство следующим образом:

$$\log_{11-x}(x+7)\cdot\log_{x+5}(9-x) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (11-x-1)(x+7-1)(x+5-1)(9-x-1) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (10-x)(x+6)(x+4)(8-x) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [-6, -4] \cup [8, 10.]$$



Перейдем к решению второго неравенства. Имеем:

$$64^{x^2-3x+20} - 0{,}125^{2x^2-6x-200} \le 0 \Leftrightarrow 8^{2x^2-6x+40} \le 8^{-2x^2+6x+200} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 40 \le -2x^2 + 6x + 200 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 40 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [-5, 8].$$

Таким образом, с учетом области определения решением системы будут служить $x \in (-5, -4) \cup \{8\}$.

Ответ: $x \in (-5, -4) \cup \{8\}$.

Пример 11. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{320 - 4^{-x}}{64 - 2^{-x}} \ge 5, \\ \log_{0,25x^2} \dfrac{x+6}{4} \le 1. \end{cases}$$

Решение. Решим сначала первое неравенство системы. Пусть $2^{-x} = y$, $y > 0$. Имеем:

$$\frac{320 - y^2}{64 - y} \ge 5 \Leftrightarrow \frac{320 - y^2 - 5(64 - y)}{64 - y} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{y(y-5)}{y - 64} \ge 0,$$

откуда $y \in (0,\ 5] \cup (64,\ +\infty)$. Если $y \le 5$, то $2^{-x} \le 5$, то есть $-x \le \log_2 5$ и $x \ge -\log_2 5$. Если же $y > 64$, то $2^{-x} > 64$, значит $-x > 8$ и $x < -8$. Таким образом, решением неравенства являются $x \in (-\infty,\ -8) \cup [-\log_2 5,\ +\infty)$. Перейдем к решению второго неравенства. Имеем:

$$\log_{0,25x^2} \frac{x+6}{4} \le 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0,25x^2 > 1, \\ 0 < \dfrac{x+6}{4} \le 0,25x^2, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < 0,25x^2 < 1, \\ \dfrac{x+6}{4} \ge 0,25x^2; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty), \\ x > -6, \\ x \in (-\infty, -2] \cup [3, +\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-2, 0) \cup (0, 2), \\ x \in [-2, 3]; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-6, -2) \cup [3, +\infty), \\ x \in (-2, 0) \cup (0, 2); \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-6,\ -2) \cup (-2,\ 0) \cup (0,\ 2) \cup [3,\ +\infty).$$

Таким образом, решением системы будут служить промежутки $x \in [-\log_2 5,\ -2) \cup (-2,\ 0) \cup (0,\ 2) \cup [3,\ +\infty)$.

Ответ: $x \in [-\log_2 5,\ -2) \cup (-2,\ 0) \cup (0,\ 2) \cup [3,\ +\infty)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 3x^2 - xy + 4y^2 = 48. \end{cases}$

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 0, \\ x^2 - xy - 2x - 3y = 6. \end{cases}$

3. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 3, \\ y^2 - 3xy = 2. \end{cases}$

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3 + y^3 = 2, \\ xy(x + y) = 2. \end{cases}$

5. Решить систему уравнений $\begin{cases} xy + x - y = 7, \\ x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$

6. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y - 20 = 0, \\ y^2 + x - 20 = 0. \end{cases}$

7. Решить систему уравнений $\begin{cases} |x - 1| + |y - 5| = 1, \\ y = 5 + |x - 1|. \end{cases}$

8. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x + y - 1} = 1, \\ \sqrt{x - y + 2} = 2y - 2. \end{cases}$

9. Решить систему уравнений $\begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2, \\ x^5\sqrt{x^2 - 4y^2} = 0. \end{cases}$

10. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x} + 3y = 9, \\ x - 1 = (\sqrt{x} + 1)y. \end{cases}$

11. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{2 - x} + \sqrt{5 - y} = 3, \\ xy - 5x - 2y + 10 = 4. \end{cases}$

12. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + |x + y - 1| = 0, \\ y - 3 + \sqrt{x - y + 6} = 0. \end{cases}$

13. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{y+2} = 1, \\ x - y = 22. \end{cases}$

14. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x-y} = 9 - |x + 2y|, \\ x(x + 4y - 2) + y(4y + 2) = 41. \end{cases}$$

15. Решить систему уравнений $\begin{cases} \left(\sqrt{3}\right)^{x-y} + 3^x \cdot 3^{-y} = 12, \\ 3^x + 3^{-y} = 10. \end{cases}$

16. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{6}{2^{1-x}} + 2 \cdot 3^{y+1} = 21, \\ 5 \cdot 2^{x+2} - \dfrac{18}{3^{2-y}} = 56. \end{cases}$

17. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3 + \log_x(1-y)} = \log_x x(1-y), \\ xy = -6. \end{cases}$$

18. Решить систему уравнений $\begin{cases} \log_{x-y} \dfrac{xy}{2} = 2, \\ x + y = xy + 1. \end{cases}$

19. Решить систему уравнений $\begin{cases} \log_3 x - 2^y + y = 3, \\ y \cdot 2^y + 2^y \cdot \log_3 x = 4. \end{cases}$

20. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3y = 11, \\ \log_{\frac{1}{3}}(3y - 5) + 3\log_{27}(x + y) = 0. \end{cases}$$

21. Решить систему уравнений $\begin{cases} \log_2 xy \cdot \log_{4x} y = 2, \\ 8x - y = 1. \end{cases}$

22. Решить систему неравенств $\begin{cases} 2 \cdot 3^{x+2} + 27 \cdot 3^{-x} \le 87, \\ \log_{3x} \dfrac{1}{27} \cdot \log_3 27x + 9 \ge 0. \end{cases}$

23. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{3-x} \dfrac{x+4}{(x-3)^2} \geq -2, \\ x^3 + 6x^2 + \dfrac{21x^2 + 3x - 12}{x-4} \leq 3. \end{cases}$$

24. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{1}{5x-12} + \dfrac{2x^2 - 6x + 1}{x-3} \geq 2x, \\ \log_{x+1}(2x+7) \cdot \log_{x+1} \dfrac{2x^2 + 9x + 7}{(x+1)^4} \leq -2. \end{cases}$$

25. Решить систему неравенств $\begin{cases} 16^{x-1,25} - 3 \cdot 4^{x-1,5} + 1 \geq 0, \\ \log_2 \dfrac{2x^2 + 5x - 7}{3x-2} \leq 1. \end{cases}$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ГЛАВА 1. МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ

1. $x \in (-\infty, -2) \cup (1, 6)$. **2.** $x \in [-7, -1] \cup [3, 4]$. **3.** $x \in (-\infty, -6) \cup (0, 1)$. **4.** $x \in (-8, -3) \cup (4, +\infty)$. **5.** $x \in (-\infty, -2) \cup [-1, 2) \cup [4, +\infty)$. **6.** $x \in [-3, 0) \cup (5, 8]$. **7.** $x \in [-2, -1) \cup \{1\} \cup (3, +\infty)$. **8.** $x \in [-4, 0) \cup (0, 1]$. **9.** $x \in (1, 2) \cup (3, +\infty)$. **10.** $x = 0$. **11.** $x \in (-1-\sqrt{6}, -1+\sqrt{6})$. **12.** $x = 1$. **13.** $x \in (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. **14.** $x = -4$. **15.** $x \in (3, +\infty)$. **16.** $x = 2$. **17.** $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right] \cup (1, +\infty)$. **18.** 6. **19.** $x \in [-5, 1] \cup (2, 3)$. **20.** -6. **21.** $x \in (-\infty, 0) \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right)$. **22.** $-0{,}3$. **23.** $x \in \left(-\infty, -\frac{7}{5}\right] \cup \left(2, \frac{13}{5}\right]$. **24.** $x \in (-\infty, -9) \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup \cup \left[\frac{11}{2}, +\infty\right)$.

ГЛАВА 2. РАСКРЫТИЕ МОДУЛЕЙ В УРАВНЕНИЯХ И НЕРАВЕНСТВАХ

1. $x = -3$, $x = -1$. **2.** $x = 2$, $x = 3$. **3.** $x = \pm 3$. **4.** $x \in (1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$. **5.** $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 1] \cup [5, +\infty)$. **6.** $x \in (4, 6)$. **7.** $x = 4$. **8.** $x = -3$. **9.** $x = -1$. **10.** $x = -25$, $x = 3$. **11.** $x \in \left[-\frac{7}{2}, \frac{15}{2}\right]$. **12.** $x = 0$, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. **13.** $x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$. **14.** $x \in \left(-2, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right)$. **15.** $x \in (\sqrt{2}, 2\sqrt{3})$. **16.** $x \in [-2, -1) \cup (-1, +\infty)$. **17.** $x \in (-\infty, -199) \cup (-66, 200)$. **18.** $x \in (-\infty, -1) \cup \left[-\frac{1}{3}, 1\right) \cup (1, +\infty)$. **19.** $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$. **20.** $x \in (-\infty, 2) \cup \{3\} \cup (4, +\infty)$. **21.** $x = -16$, $x = 18$. **22.** $x = 0$, $x = \pm 1$,

$x = \pm 2$, $x = \pm 3$. **23.** $x = \frac{11}{3}$, $x = -\frac{17}{5}$. **24.** $x \in [1, 2] \cup \{5\}$. **25.** $x \in [-6, -1] \cup [0, +\infty)$. **26.** $x \in (-2, 2) \cup (2, 3) \cup (6, +\infty)$. **27.** $x \in (-\infty, -4) \cup \{0\} \cup \{2\} \cup (4, +\infty)$.

ГЛАВА 3. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

1. $x = -1$. **2.** $x = 4$. **3.** $x = 1$. **4.** $x = -1$. **5.** $x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$.

6. $x \in \left[\frac{10}{3}, \frac{15}{2}\right]$. **7.** $x \in [-7, -2) \cup (4, +\infty)$. **8.** $x \in [2, +\infty)$.

9. $x \in (3, 5]$. **10.** $x \in \left(-\infty, -\frac{17}{2}\right] \cup \left(\frac{\sqrt{185} - 9}{2}, +\infty\right)$. **11.** $x \in [1, 2)$.

12. $x \in \left[\frac{20}{9}, 4\right) \cup (5, +\infty)$. **13.** $x \in [4, +\infty)$. **14.** $x \in (-\infty, 1] \cup \{4\}$.

15. $x = 3$. **16.** $x = -1$. **17.** $x = \frac{6 \pm 5\sqrt{3}}{2}$. **18.** $x = 6$. **19.** $x = 3$.

20. $x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$. **21.** $x \in \left[-\frac{1 + 2\sqrt{29}}{5}, 2\right]$. **22.** $x = 1$. **23.** $x \in [5, +\infty)$.

24. $x \in (-\infty, -2] \cup \left[-1, \frac{\sqrt{13} - 1}{6}\right)$. **25.** $x = 3$, $x = \pm 1$. **26.** $x = -1$, $x = 4$. **27.** $x \in \{-2\} \cup [1, 3]$. **28.** $x \in \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right] \cup \left\{\frac{2}{5}\right\}$.

ГЛАВА 4. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

4.1. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ. 4.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СУММЫ И РАЗНОСТИ ЛОГАРИФМОВ

1. $x = 8{,}5$. **2.** $x = 1{,}5$. **3.** $x = 1 - \sqrt{2}$. **4.** 2. **5.** $x = \frac{7}{5}$.

6. $x = -2 - \sqrt{5}$, $x = \sqrt{\frac{7}{3}}$. **7.** $x = 4$. **8.** $x \in [-1, 4 - 2\sqrt{6})$.

9. $x \in (5, 2+\sqrt{17})$. **10.** $x \in \left(1-\sqrt{2}, \frac{2}{3}\right) \cup (1, 1+\sqrt{2})$. **11.** $x \in (-2, 0) \cup (1, 3)$. **12.** $x \in (-\sqrt{10}, -3) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (3, \sqrt{10})$. **13.** $x \in (2, 1+\sqrt{3})$. **14.** $x \in [-3, 2) \cup (5, 7]$. **15.** $x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$. **16.** $x \in [-20, -9) \cup (1, 2]$.

4.3. МЕТОД ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ

1. $x = 3$. **2.** $x = \frac{1}{2}$. **3.** $x = -1 \pm \sqrt{2}$. **4.** $x = 0$. **5.** $x \in \left(\log_9 \frac{11}{3}, +\infty\right)$. **6.** $x \in (-\sqrt{7}, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \sqrt{7})$. **7.** $x \in \left(1, \log_{\frac{7}{3}} 3\right)$. **8.** $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. **9.** $x \in (-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$. **10.** $x \in \left(-\infty, \log_3 \frac{1}{2}\right] \cup \left[\log_3 \frac{3}{5}, \log_3 \frac{5}{3}\right)$. **11.** $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. **12.** $x \in (2 - \log_2^2 3, 2]$. **13.** $x = 2$, $x = 4$. **14.** $x = 16^{-\frac{1}{27}}$, $x = 2^{\frac{1}{3}}$. **15.** $-\frac{17}{6}$. **16.** $x \in \left(2, \frac{19}{9}\right) \cup (3, 2+\sqrt{3})$. **17.** $x \in \left[\frac{1}{8}, 1\right) \cup (1, 16] \cup (64, +\infty)$. **18.** $x \in (0, \sqrt[6]{2} - 1] \cup [63, +\infty)$. **19.** $x \in (\log_2 49 - 4, \log_2 7)$. **20.** $x \in (0, \log_2 3]$. **21.** $x \in (\log_5 626 - 4, \log_5 26)$. **22.** $x \in \left[\frac{1}{4}, 1\right) \cup [\sqrt{2}, +\infty)$. **23.** $x = -1$. **24.** $x \in \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup (1, +\infty)$.

4.4. РАСЩЕПЛЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ

1. $x \in (-\infty, -6] \cup (-3, -2)$. **2.** $x \in \left(0, \frac{23}{35}\right)$. **3.** $x \in (1, 4]$. **4.** $x \in (1, 2) \cup (2, 3) \cup [7, +\infty)$. **5.** $x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right] \cup (1, +\infty)$. **6.** $x \in (0, 1) \cup \left(\sqrt{6} - 1, \frac{5}{2}\right)$. **7.** $x \in \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{2}\right)$. **8.** $x \in \left[\frac{4}{5}, 1\right)$. **9.** $x \in$

$\in (-12, -3) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (4, 7) \cup (7, +\infty)$. **10.** $x \in [-10, -9) \cup (-9, -7) \cup (4, \sqrt{17})$. **11.** $x \in \left[\log_2 \frac{1}{3}, 2\right) \cup \left(2, \log_2 \frac{13}{3}\right)$. **12.** $x \in [-1, 2) \cup (5, 6] \cup (8, +\infty)$. **13.** $x \in \left(3, \frac{7}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{2}, \frac{19}{5}\right] \cup (4, 5)$. **14.** $x \in (-\infty, -7] \cup (-4, -3) \cup (-2, 0) \cup (1, +\infty)$. **15.** $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, 2)$. **16.** $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \{0\} \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$. **17.** $x \in \left[\frac{13}{50}, 9 + 4\sqrt{5}\right)$. **18.** $x \in (-3, -2) \cup (1, 2]$.

4.5. ПЕРЕХОД К НОВОМУ ОСНОВАНИЮ

1. $x = -\frac{31}{8}$, $x = -2$. **2.** 392. **3.** $x = 2^{\pm\sqrt{2}}$. **4.** $x = -2$. **5.** $x \in \{2\} \cup (4, 8)$. **6.** $x \in (\log_2 \frac{33}{32}, 1) \cup (1, \log_2 17)$. **7.** $x \in [-5, 2) \cup \left(2, \frac{19}{9}\right)$. **8.** $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \cup (\sqrt[3]{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$. **9.** $x \in (-\infty, -2] \cup [0, \lg 101 - 2)$. **10.** $x \in [-3, 0)$. **11.** $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$.

ГЛАВА 5. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА СМЕШАННОГО ТИПА

1. $x = -\frac{15}{4}$, $x = -3$, $x = -\frac{7}{4}$. **2.** $x \in \left[\log_{\frac{3}{4}} 4, \log_{\frac{3}{4}} \sqrt{7}\right)$. **3.** $x = -9$, $x = \frac{\sqrt{33} - 1}{2}$. **4.** $x \in (-\infty, 0]$. **5.** $x = 3$, $x = \log_2(3 - \sqrt{7})$. **6.** $x \in [2, 18)$. **7.** $x = \frac{1}{4}$. **8.** $x \in \left(-1, \frac{1}{3}\right] \cup \left[1, \frac{7}{3}\right)$. **9.** $x = \frac{1}{9}$. **10.** $x \in \left[-1, 5^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} - 2\right)$. **11.** $x \in \left[-2^{\frac{7}{2}}, -2^{\frac{3}{8}}\right) \cup \left(2^{\frac{3}{8}}, 2^{\frac{7}{2}}\right]$. **12.** $x = \frac{1}{7}$,

$x = 7^{\frac{-3\pm\sqrt{2}}{7}}$. **13.** $x \in (0,1) \cup \left[4, 2^{1+\sqrt{3}}\right]$. **14.** $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup [1, 2) \cup$ $\cup (3, 6]$. **15.** $x \in \left(\frac{3}{2}, 2\right) \cup (2, +\infty)$. **16.** $x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup (1, 2]$. **17.** $x \in$ $\in \left[\frac{\sqrt{2}-16}{48}, -\frac{7}{24}\right) \cup \left(-\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{2}-2}{6}\right]$.

ГЛАВА 6. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ

1. $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \cup (1, +\infty)$. **2.** $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2-\sqrt{15}) \cup [6,$ $+\infty)$. **3.** $x \in (1, +\infty)$. **4.** $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

ГЛАВА 7. СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

1. $\left\{(4,1); \left(-\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)\right\}$. **2.** $\left\{(-2,2); \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right); \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right); (6,2)\right\}$. **3.** $\left\{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$. **4.** $\{(1, 1)\}$. **5.** $\{(3, 2); (-2, -3);$ $(\sqrt{10}+3, \sqrt{10}-3); (3-\sqrt{10}, -3-\sqrt{10})\}$. **6.** $\left\{(4,4); (-5, -5);\right.$ $\left.\left(\frac{1+\sqrt{77}}{2}, \frac{1-\sqrt{77}}{2}\right); \left(\frac{1-\sqrt{77}}{2}, \frac{1+\sqrt{77}}{2}\right)\right\}$. **7.** $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right); \left(\frac{3}{2},\right.\right.$ $\left.\left.\frac{11}{2}\right)\right\}$. **8.** $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right\}$. **9.** $\left\{(4,2); \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right\}$. **10.** $\{(9, 2)\}$. **11.** $\{(1, 1);$ $(-2, 4)\}$. **12.** $\{(-1, 1)\}$. **13.** $\{(28, 6); (-7, -29)\}$. **14.** $\left\{(5,1); \left(\frac{1}{3},\right.\right.$

$-\frac{11}{3}\right)\right\}$. **15.** $\{(0, -2); (2, 0)\}$. **16.** $\{(\log_2 3, \log_3 2)\}$. **17.** $\{(3, -2)\}$. **18.** $\left\{\left(1, \frac{1}{2}\right)\right\}$. **19.** $\{(81, 0)\}$. **20.** $\{(-1, 2)\}$. **21.** $\left\{\left(\frac{5}{8}, 4\right)\right\}$. **22.** $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup [1, 2 - \log_3 2]$. **23.** $x \in \{-3\} \cup \{0\} \cup [1, 2)$. **24.** $x \in \left[\sqrt{6}, \frac{5}{2}\right] \cup (3, +\infty)$. **25.** $x \in \left(-\frac{7}{2}, -1\right] \cup \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Справочное издание

Садовничий Юрий Викторович

ЕГЭ
МАТЕМАТИКА
ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

ООО «УЧПЕДГИЗ»

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU.АГ81.Н05246 от 15.06.2017 г.

109428, Россия, Москва, Рязанский проспект, д. 22, кор. 2.
E-mail: по общим вопросам: uchpedgiz@bk.ru.

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ООО «ИПК Парето-Принт», г. Тверь, www.pareto-print.ru

УВАЖАЕМЫЕ ПОКУПАТЕЛИ!

Издательство «УЧПЕДГИЗ»
предлагает вашему вниманию следующие учебные издания:

1. ЕГЭ 2018. *100 баллов.* **Биология**
2. ЕГЭ 2018. *100 баллов.* **Математика.** Профильный уровень. Задачи с параметром
3. ЕГЭ 2018. *100 баллов.* **История России.** Исторические портреты XIX–XX века
4. ЕГЭ 2018. *100 баллов.* **Математика.** Профильный уровень. Планиметрия
5. ЕГЭ 2018. *100 баллов.* **Физика**
6. ЕГЭ 2018. *100 баллов.* **Физика.** Практическое руководство
7. ЕГЭ 2018. *100 баллов.* **Русский язык.** Сочинение
8. ЕГЭ 2018. *100 баллов.* **Математика.** Профильный уровень
9. ЕГЭ 2018. *100 баллов.* **Математика.** Профильный уровень. Решение задач и уравнений в целых числах
10. ЕГЭ 2018. *100 баллов.* **Математика.** Профильный уровень. Планиметрия. Стереометрия
11. ЕГЭ 2018. *100 баллов.* **Обществознание**
12. ЕГЭ 2018. *100 баллов.* **Математика.** Профильный уровень. Уравнения и неравенства
13. ЕГЭ 2018. *Тематический тренажер.* **Русский язык.** Задание части 2
14. ЕГЭ 2018. *Тематический тренажер.* **История**
15. ЕГЭ 2018. *Тематический тренажер.* **История.** Задания с иллюстративным материалом и история российской культуры
16. ЕГЭ 2018. *Тематический тренажер.* **Математика.** Профильный уровень. Задания части 2
17. ЕГЭ 2018. *Тематический тренажер.* **Обществознание**
18. ЕГЭ 2018. *Тематический тренажер.* **Обществознание.** Политика. Право. Человек и общество. Экономика. Социология
19. ЕГЭ 2018. *Тематический тренажер.* **Русский язык.** Задания части 1
20. ЕГЭ 2018. *Тематический тренажер.* **Русский язык.** Орфография. Пунктуация. Языковые нормы
21. ЕГЭ 2018. *Тематический тренажер.* **Литература.** Часть 2
22. ЕГЭ 2018. *Тематический тренажер.* **Математика.** Профильный уровень. Теория вероятностей и элементы статистики
23. ЕГЭ 2018. *Экзаменационный тренажер.* 20 вариантов. **Обществознание**
24. ЕГЭ 2018. *Экзаменационный тренажер.* 20 вариантов. **Биология**
25. ЕГЭ 2018. *Экзаменационный тренажер.* 20 вариантов. **История**
26. ЕГЭ 2018. *Экзаменационный тренажер.* 20 вариантов. **Литература**

27. ЕГЭ 2018. *Экзаменационный тренажер.* 20 вариантов. **Математика**
28. ЕГЭ 2018. *Экзаменационный тренажер.* 20 вариантов. **Русский язык**
29. ЕГЭ 2018. *Экзаменационный тренажер.* 20 вариантов. **Физика**
30. ОГЭ 2018. *100 баллов.* **Обществознание**
31. ОГЭ 2018. *Тематический тренажер.* **История России.** Задания повышенной сложности
32. ОГЭ 2018. *Тематический тренажер.* **Математика.** Теория вероятностей и элементы статистики
33. ОГЭ 2018. *Тематический тренажер.* **Обществознание.** Задания части 1 и 2
34. ОГЭ 2018. *Тематический тренажер.* **Русский язык**
35. ОГЭ 2018. *Тематический тренажер.* **Русский язык.** Задания части 3. Сочинение
36. ОГЭ 2018. *Экзаменационный тренажер.* 20 вариантов. **Математика**
37. ОГЭ 2018. *Экзаменационный тренажер.* 20 вариантов. **Обществознание**
38. ОГЭ 2018. *Экзаменационный тренажер.* 20 вариантов. **Русский язык**